ÜBER

THETAFUNCTIONEN

DEREN CHARAKTERISTIKEN

AUS DRITTELN GANZER ZAHLEN GEBILDET SIND.

HABILITATIONSSCHRIFT

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT WÜRZBURG

VORGELEGT

VON

Dr. A. KRAZER.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1883.

ÜBER

THETAFUNCTIONEN

DEREN CHARAKTERISTIKEN

AUS DRITTELN GANZER ZAHLEN GEBILDET SIND.

HABILITATIONSSCHRIFT

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

KÖNIGLICHEN UNIVERSITÄT WÜRZBURG

VORGELEGT

VON

Dr. A. KRAZER.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1883.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549819_0328

Die von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Prym*) eingeführte, durch Verallgemeinerung der Riemann'schen p-fach unendlichen Thetareihe gewonnene allgemeinere Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'}) + 2\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(v_\mu+h_\mu\pi i)},$$

in welcher die g, h beliebige Constanten bezeichnen, ändert sich, den Gleichungen:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\nu+1 \dots g_p \\ h_1 \dots \quad h_\nu \quad \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\nu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\nu \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p),$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots \quad g_\nu \quad \dots g_p \\ h_1 \dots h_\nu+1 \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_\nu \dots g_p \\ h_1 \dots h_\nu \dots h_p \end{bmatrix}(v_1 \mid \cdots \mid v_p)\ e^{2g_\nu\pi i}$$

gemäss, stets nur um einen constanten Factor, wenn man die Grössen g, h um irgend welche ganze Zahlen ändert. Beschränkt man daher die Werthe der Grössen g, h auf rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner r, so existiren, wenn man von constanten Factoren, die in diesem Falle immer r^{te} Einheitswurzeln sind, absieht, im Ganzen nur r^{2p} verschiedene Functionen; man erhält dieselben, wenn man für $\nu = 1, 2, \dots, p$:

$$g_\nu = \frac{\alpha_\nu}{r}, \qquad h_\nu = \frac{\beta_\nu}{r}$$

setzt und dann an Stelle des Systems der $2p$ Buchstaben α, β die sämmtlichen Variationen der Elemente $0, 1, \dots, r-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung treten lässt. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, die Relationen aufzusuchen, welche zwischen diesen r^{2p} auf

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882, Teubner; pag. 25.

dieselben Argumente v bezogenen Thetafunctionen bestehen. Dieses Problem ist bei beliebigem p bis jetzt nur für den Fall $r = 2$ behandelt, für $p = 1$ dagegen haben die Herren Thomae*), Klein**) nnd Bianchi***) auch die Fälle 3, 5, 7, ... in den Kreis der Betrachtung gezogen, ohne jedoch speciell das soeben erwähnte Ziel zu verfolgen. In der vorliegenden Arbeit, die ihre Entstehung den im persönlichen Verkehre mit Herrn Prof. Klein gewonnenen Anregungen verdankt, habe ich für den einfachsten dieser Fälle, nämlich für $p = 1$, $r = 3$, die gestellte Aufgabe behandelt und zu einem gewissen Abschlusse gebracht. Auf die bei dieser Untersuchung erzielten, verhältnissmässig einfachen Resultate möchte ich aber weniger Gewicht legen, als auf die dabei befolgte, durch die Anwendung einer einzigen Hauptformel charakterisirte Methode, die auch im allgemeinen Falle geeignet sein dürfte, die Lösung des gestellten Problems zu ermöglichen.

1.

Die unendliche Reihe:

$$\vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a\left(m+\frac{\alpha}{3}\right)^2 + 2\left(m+\frac{\alpha}{3}\right)\left(v+\frac{\alpha'}{3}\pi i\right)},$$

bei der α, α' ganze Zahlen bedeuten, a eine beliebige complexe Constante mit wesentlich negativem reellem Theile ist, stellt eine einwerthige und für endliche Werthe von v auch stetige Function der complexen Veränderlichen v dar, welche den Gleichungen:

$$(1) \qquad \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v + \pi i) = e^{\frac{2}{3}\alpha\pi i} \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v),$$

$$(2) \qquad \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v + a) = e^{-\frac{2}{3}\alpha'\pi i} \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v)\, e^{-2v-a},$$

$$(3) \qquad 4\,\frac{\partial \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v)}{\partial a} = \frac{\partial^2 \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v)}{\partial v^2}$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche Werthe

*) Thomae, Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen, deren Argumente sich um Drittel der Periodicitätsmodulen unterscheiden, durch algebraische Functionen. Math. Annalen Bd. VI, pag. 603.

**) Klein, Ueber die unendlich vielen Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung. Math. Annalen Bd. XVII, pag. 133, und: Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Function. Math. Annalen Bd. XVII, pag. 565.

***) Bianchi, Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. Math. Annalen Bd. XVII, pag. 234.

von v auch stetige Function der complexen Veränderlichen v die Gleichungen (1), (2), so kann sie sich von der Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v)$ nur um einen von v freien Factor unterscheiden; erfüllt sie ausserdem noch die Gleichung (3), so ist dieser Factor auch von a unabhängig.

Aus der die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v)$ darstellenden Reihe lassen sich ohne Mühe folgende Gleichungen ableiten:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\pm 3\\ \alpha'\end{bmatrix}(v) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v), \tag{4}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\pm 3\end{bmatrix}(v) = e^{\pm\frac{2}{3}\alpha\pi i}\,\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v), \tag{5}$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(-v) = \vartheta\begin{bmatrix}-\alpha\\ -\alpha'\end{bmatrix}(v). \tag{6}$$

Der Zahlencomplex $\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}$ soll die zur Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v)$ gehörige Charakteristik genannt werden. Die Gleichungen (4), (5) zeigen dann, dass jede Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v)$ unter Ausscheidung eines Factors, der immer eine drittte Einheitswurzel ist, auf eine der folgenden neun:

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}(v),$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}(v)$$

reducirt werden kann, bei denen die Charakteristiken nur aus den Zahlen $0,\ 1,\ -1$ als Elementen gebildet werden. Die neun bei diesen Functionen auftretenden Charakteristiken sollen Normalcharakteristiken genannt werden. Die Gleichung (6) zeigt dann weiter, dass von diesen neun Functionen eine, nämlich $\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(v)$, eine gerade Function ist, die anderen acht aber paarweise in einander übergehen, wenn man das Argument v in $-v$ verwandelt.

Ferner ergiebt sich noch, wenn man das System $v + \frac{\varkappa}{3}a + \frac{\varkappa'}{3}\pi i$, bei dem $\varkappa$, $\varkappa'$ ganze Zahlen bedeuten sollen, symbolisch mit $v + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{smallmatrix}\right|$ bezeichnet, die im Späteren wiederholt zur Anwendung kommende Relation:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}\left(v + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{smallmatrix}\right|\right) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha+\varkappa\\ \alpha'+\varkappa'\end{bmatrix}(v)\, e^{-\frac{\varkappa^2}{9}a - \frac{2}{3}\varkappa\left(v + \frac{\alpha'}{3}\pi i + \frac{\varkappa'}{3}\pi i\right)}. \tag{7}$$

Setzt man in dieser Formel, indem man unter λ, λ' ganze Zahlen versteht, $\varkappa = 3\lambda$, $\varkappa' = 3\lambda'$ und wendet die Gleichungen (4), (5) an, so erhält man die Relation:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}\left(v + \left|\begin{smallmatrix}3\lambda\\ 3\lambda'\end{smallmatrix}\right|\right) = \vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v)\, e^{-\lambda^2 a - 2\lambda v + \frac{2}{3}(\alpha\lambda' - \lambda\alpha')\pi i}. \tag{8}$$

Die Gleichung (7) zeigt, dass man aus jeder ϑ-Function durch Aenderung des Argumentes um Drittel der Perioden und Hinzufügung

einer Exponentialgrösse jede andere erzeugen kann. Setzt man in der Gleichung (7) $\alpha = \alpha' = 0$ und bezeichnet die keiner Bedingung unterworfenen ganzen Zahlen $\varkappa, \varkappa'$ in neuer Bezeichnung mit α, α', so entsteht die Formel:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v) = \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\left(v + \left|\begin{matrix}\alpha\\ \alpha'\end{matrix}\right|\right) e^{\frac{\alpha^2}{9}\alpha + \frac{2}{3}\alpha\left(v + \frac{\alpha'}{3}\pi i\right)},$$

vermittelst deren man eine beliebige Function $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(v)$ aus der speciellen Function $\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(v)$ erzeugen kann.

2.

Der weiteren Untersuchung sollen einige Bemerkungen über die Charakteristiken der Thetafunctionen vorausgeschickt werden. Als allgemeine Zeichen für Charakteristiken mögen die Symbole:

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\gamma\\ \gamma'\end{bmatrix}, \ldots$$

oder, wenn kein Missverständniss zu befürchten, entsprechend die einfacheren $[\alpha], [\beta], [\gamma], \ldots$ dienen; auch soll eine Charakteristik von der Form $\begin{bmatrix}-\alpha\\ -\alpha'\end{bmatrix}$ abgekürzt durch $[-\alpha]$, die Charakteristik $\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ durch $[0]$ bezeichnet werden. Zwei Charakteristiken $[\alpha] = \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}$ und $[\beta] = \begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix}$ sollen congruent genannt werden, $[\alpha] \equiv [\beta]$, wenn $\alpha \equiv \beta$ (mod. 3), $\alpha' \equiv \beta'$ (mod. 3) ist. Die Charakteristik $[\alpha + \beta] = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha'+\beta'\end{bmatrix}$ soll die Summe, die Charakteristik $[\alpha - \beta] = \begin{bmatrix}\alpha-\beta\\ \alpha'-\beta'\end{bmatrix}$ die Differenz der Charakteristiken $[\alpha] = \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}$ und $[\beta] = \begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix}$ genannt werden, sodass die Gleichungen $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$, $[\alpha] - [\beta] = [\alpha - \beta]$ bestehen.

Die neun, schon in Art. 1 definirten Normalcharakteristiken können, wenn man die Charakteristik $[0]$ noch hinzunimmt, aus den Charakteristiken $[\alpha] = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ und $[\beta] = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ auf Grund des Schemas:

$$[0], [\alpha], [-\alpha], [\beta], [\beta+\alpha], [\beta-\alpha], [-\beta], [-\beta+\alpha], [-\beta-\alpha]$$

erzeugt werden. Die Reihenfolge:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$,	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$,

in welcher sie bei dieser Erzeugung auftreten, soll die *natürliche* genannt werden. Bezeichnet man dann eine jede Normalcharakteristik mit der ihr bei dieser Anordnung zukommenden Stellenzahl, so kann man aus der folgenden Tabelle:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	1	5	6	4	8	9	7
3	1	2	6	4	5	9	7	8
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	4	8	9	7	2	3	1
6	4	5	9	7	8	3	1	2
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	7	2	3	1	5	6	4
9	7	8	3	1	2	6	4	5

zu je zwei Charakteristiken die ihrer Summe congruente Normalcharakteristik finden. Die Tabelle ist nämlich dadurch entstanden, dass allgemein in das der μ^{ten} Horizontalreihe und ν^{ten} Verticalreihe gemeinsam angehörende Quadrat die Stellenzahl derjenigen Charakteristik aufgenommen wurde, welche der Summe der beiden den Stellenzahlen μ und ν entsprechenden Charakteristiken congruent ist.

3.

In der Folge soll zur Abkürzung $e^{\frac{2}{3}\pi i} = \tau$ gesetzt werden; dann ist $\tau^3 = 1$, $1 + \tau + \tau^2 = 0$. Setzt man dann weiter, indem man unter ε, ε' und η, η' die Elemente zweier beliebiger Charakteristiken $[\varepsilon]$ und $[\eta]$ versteht:

$$e^{\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i} = \tau^{|\varepsilon|}, \qquad e^{\frac{2}{3}(\varepsilon\eta' - \varepsilon'\eta)\pi i} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$$

— indem man sich vorbehält, bei dem letzten Symbole, sobald kein Missverständniss zu befürchten ist, die Charakteristikenklammern zu unterdrücken, also einfacher $\tau^{\varepsilon\,|\,\eta}$ statt $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ zu schreiben — so sind $\tau^{|\varepsilon|}$ und $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ gleichfalls dritte Einheitswurzeln, und es gelten für diese Symbole die folgenden Gesetze:

$$\tau^{|0|} = 1, \quad \tau^{|\varepsilon|} = \tau^{|-\varepsilon|}, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[0]} = 1, \quad \tau^{[0]\,|\,[\varepsilon]} = 1, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\varepsilon]} = 1,$$

$$\tau^{[\varepsilon]\,|\,[-\eta]} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} \cdot \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}, \quad \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} = \tau^{[\eta]\,|\,[-\varepsilon]} = \tau^{[-\eta]\,|\,[\varepsilon]} = \tau^{[-\varepsilon]\,|\,[-\eta]},$$

$$\tau^{[\varepsilon+\zeta]\,|\,[\eta+\vartheta]} = \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} \cdot \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\vartheta]} \cdot \tau^{[\zeta]\,|\,[\eta]} \cdot \tau^{[\zeta]\,|\,[\vartheta]}.$$

Dabei ist es nicht unwichtig, zu bemerken, dass der Werth der Ausdrücke $\tau^{|\varepsilon|}$ und $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ ungeändert bleibt, wenn man an Stelle der

Charakteristiken, auf die sie sich beziehen, irgend welche denselben congruente setzt.

Versteht man endlich, mit Rücksicht auf das Symbol $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$, unter $[\eta]$ eine der acht von $[0]$ verschiedenen Normalcharakteristiken und lässt dann an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach die neun Normalcharakteristiken treten, so haben von den neun auf diese Weise aus $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]}$ hervorgehenden Ausdrücken drei den Werth 1, drei den Werth τ, drei den Werth τ^2, und es findet speciell die Beziehung $\tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} = 1$ statt für $[\varepsilon] = [0]$, $[\eta]$, $[-\eta]$. Daraus folgt, dass die Summe $1 + \tau^{[\varepsilon]\,|\,[\eta]} + \tau^{[\varepsilon]\,|\,[-\eta]}$ für die drei Charakteristiken $[\varepsilon] = [0]$, $[\eta]$, $[-\eta]$ den Werth 3, für die übrigen sechs Charakteristiken den Werth 0 besitzt.

4.

Das Problem, das im Folgenden gelöst werden soll, besteht darin, die wesentlichen Relationen, welche zwischen den neun Fundamentalfunctionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}(v),$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(v),\ \vartheta\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}(v)$$

existiren, herzustellen und hinsichtlich ihrer gegenseitigen Beziehungen zu untersuchen. Alle diese verschiedenen Relationen können auf einfache Weise aus einer einzigen Fundamentalformel abgeleitet werden, die jetzt zunächst aufgestellt werden soll. Diese Formel geht als ganz specieller Fall aus einer von Herrn Prym aufgestellten allgemeinen Thetaformel*) auf folgende Weise hervor.

Es mögen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(6)}$ unabhängige Veränderliche bezeichnen, $u'^{(1)}, u'^{(2)}, \ldots, u'^{(6)}$ lineare Functionen derselben, welche durch das Gleichungensystem:

$$(J)\qquad \begin{aligned}
3u'^{(1)} &= -2u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(2)} &= u^{(1)} - 2u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(3)} &= u^{(1)} + u^{(2)} - 2u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(4)} &= u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} - 2u^{(4)} + u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(5)} &= u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} - 2u^{(5)} + u^{(6)},\\
3u'^{(6)} &= u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)} + u^{(5)} - 2u^{(6)},
\end{aligned}$$

definirt sind. Dieses Gleichungensystem ist ein involutorisches orthogonales, da aus ihm nicht nur

$$u'^{(1)^2} + u'^{(2)^2} + \cdots + u'^{(6)^2} = u^{(1)^2} + u^{(2)^2} + \cdots + u^{(6)^2}$$

*) Prym, a. a. O. Formel (9) pag. 44.

folgt, sondern in ihm auch unbeschadet der Richtigkeit die Grössen u mit den Grössen u' beziehlich vertauscht werden können. Führt man dann diese Grössen u, u' in die Prym'sche Thetaformel ein, nachdem man in derselben $p = 1$, $n = 6$, $r = 3$ gesetzt hat, während die Bestimmung der Zahl s noch vorbehalten bleibt, so geht aus derselben, wenn man der in Art. 1 eingeführten Bezeichnung entsprechend in den Charakteristiken der Thetareihen den Nenner 3 allenthalben unterdrückt, die folgende specielle Formel hervor:

$$3^6 s\, \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(1)})\cdots\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(6)}) = \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,2} \vartheta\begin{bmatrix}\bar{\alpha}^{(1)}\\ \bar{\beta}^{(1)}\end{bmatrix}(3u^{(1)})\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\bar{\alpha}^{(6)}\\ \bar{\beta}^{(6)}\end{bmatrix}(3u^{(6)}).$$

In dieser Formel ist:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}^{(1)} &= -2\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \alpha^{(4)} + \alpha^{(5)} + \alpha^{(6)},\\
\bar{\alpha}^{(2)} &= \alpha^{(1)} - 2\alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \alpha^{(4)} + \alpha^{(5)} + \alpha^{(6)},\\
\bar{\alpha}^{(3)} &= \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} - 2\alpha^{(3)} + \alpha^{(4)} + \alpha^{(5)} + \alpha^{(6)},\\
\bar{\alpha}^{(4)} &= \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} - 2\alpha^{(4)} + \alpha^{(5)} + \alpha^{(6)},\\
\bar{\alpha}^{(5)} &= \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \alpha^{(4)} - 2\alpha^{(5)} + \alpha^{(6)},\\
\bar{\alpha}^{(6)} &= \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \alpha^{(4)} + \alpha^{(5)} - 2\alpha^{(6)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^{(1)} &= -2\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)} + \beta^{(4)} + \beta^{(5)} + \beta^{(6)},\\
\bar{\beta}^{(2)} &= \beta^{(1)} - 2\beta^{(2)} + \beta^{(3)} + \beta^{(4)} + \beta^{(5)} + \beta^{(6)},\\
\bar{\beta}^{(3)} &= \beta^{(1)} + \beta^{(2)} - 2\beta^{(3)} + \beta^{(4)} + \beta^{(5)} + \beta^{(6)},\\
\bar{\beta}^{(4)} &= \beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)} - 2\beta^{(4)} + \beta^{(5)} + \beta^{(6)},\\
\bar{\beta}^{(5)} &= \beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)} + \beta^{(4)} - 2\beta^{(5)} + \beta^{(6)},\\
\bar{\beta}^{(6)} &= \beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)} + \beta^{(4)} + \beta^{(5)} - 2\beta^{(6)},
\end{aligned}$$

und die Summation auf der rechten Seite ist dann in der Weise auszuführen, dass jede der sechs Grössen α, wie jede der sechs Grössen β unabhängig von den anderen die Werthe 0, 1, 2 durchläuft; es bezeichnet weiter s die noch zu bestimmende Anzahl der nach dem Modul 3 incongruenten Lösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{aligned}
-2x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)} - 2x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)} + x^{(2)} - 2x^{(3)} + x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} - 2x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} - 2x^{(5)} + x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,\\
x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + x^{(5)} - 2x^{(6)} &\equiv 0 \pmod 3,
\end{aligned}$$

deren Elemente man sich immer auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul 3 reducirt denken kann.

Um den Werth der Zahl s zu bestimmen, berücksichtige man, dass die linken Seiten der soeben aufgestellten Congruenzen einander congruent sind nach dem Modul 3, und dass in Folge dessen die Lösungen des Congruenzensystems identisch sind mit den Lösungen einer einzigen der darin enthaltenen Congruenzen, oder, was auf dasdasselbe hinauskommt, mit den Lösungen der Congruenz:

$$x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + x^{(4)} + x^{(5)} + x^{(6)} \equiv 0 \pmod 3.$$

Nun besitzt aber diese letzte Congruenz 3^5 nach dem Modul 3 incongruente Lösungen; man erhält dieselben, wenn man an Stelle des Systems der fünf Zahlen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(5)}$ alle Variationen der Elemente 0, 1, 2 zur fünften Classe mit Wiederholung treten lässt und jedesmal $x^{(6)}$ als 0, 1 oder 2 aus der Congruenz:

$$x^{(6)} \equiv -x^{(1)} - x^{(2)} - \cdots - x^{(5)} \pmod 3$$

bestimmt; es ist demnach $s = 3^5$.

Die auf der rechten Seite der aufgestellten Thetaformel bei der Ausführung der Summation auftretenden 3^{12} Thetaproducte können mit Hülfe der Relationen (4), (5) des Art. 1 auf eine geringere Anzahl reducirt werden. Setzt man nämlich:

$$\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \alpha^{(4)} + \alpha^{(5)} + \alpha^{(6)} = A,$$
$$\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \alpha^{(3)} + \beta^{(4)} + \beta^{(5)} + \beta^{(6)} = B,$$

so kann man die Grössen $\bar\alpha$, $\bar\beta$ in die Form:

$$\bar\alpha^{(1)} = A - 3\alpha^{(1)}, \quad \bar\alpha^{(2)} = A - 3\alpha^{(2)}, \ldots, \bar\alpha^{(6)} = A - 3\alpha^{(6)},$$
$$\bar\beta^{(1)} = B - 3\beta^{(1)}, \quad \bar\beta^{(2)} = B - 3\beta^{(2)}, \ldots, \bar\beta^{(6)} = B - 3\beta^{(6)},$$

bringen; es wird dann unter Anwendung der Relationen (4), (5) des Art. 1:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(\nu)}\\ \bar\beta^{(\nu)}\end{bmatrix}(3u^{(\nu)}) = \vartheta\begin{bmatrix}A-3\alpha^{(\nu)}\\ B-3\beta^{(\nu)}\end{bmatrix}(3u^{(\nu)}) = \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B-3\beta^{(\nu)}\end{bmatrix}(3u^{(\nu)})$$
$$= \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}(3u^{(\nu)})\, e^{-\frac{2}{3}A\beta^{(\nu)}\pi i}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, p$; entsprechend wird, da

$$\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \cdots + \beta^{(6)} = B$$

ist:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(1)}\\ \bar\beta^{(1)}\end{bmatrix}(3u^{(1)}) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}\bar\alpha^{(6)}\\ \bar\beta^{(6)}\end{bmatrix}(3u^{(6)}) = \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}(3u^{(1)}) \ldots \vartheta\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}(3u^{(6)})\, e^{-\frac{2}{3}AB\pi i},$$

und die obige Thetaformel nimmt auf Grund der letzten Gleichung, wenn man zugleich noch an Stelle von s den dafür gefundenen Werth 3^5 einführt, zunächst die Gestalt an:

$$3^{11}\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(1)})\ldots\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(6)})=\sum_{\alpha,\beta}^{0,1,2}\vartheta\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}(3u^{(1)})\ldots\vartheta\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}(3u^{(6)})e^{-\frac{2}{3}AB\pi i}.$$

Bei der Ausführung der auf der rechten Seite dieser Formel angedeuteten Summation treten an Stelle von A, und ebenso, aber unabhängig davon an Stelle von B die 3^6 ganzen Zahlen, die aus:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+x^{(4)}+x^{(5)}+x^{(6)}$$

hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der sechs Grössen $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(6)}$ der Reihe nach sämmtliche Variationen der Elemente 0, 1, 2 zur sechsten Classe mit Wiederholung setzt. Berücksichtigt man nun, dass die Congruenz:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv 0 \pmod 3,$$

wie oben angegeben, 3^5 nach dem Modul 3 incongruente Lösungen besitzt, dass aber auch eine jede der beiden Congruenzen:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv 1 \pmod 3$$

und:

$$x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv -1 \pmod 3$$

ebenfalls 3^5 nach dem Modul 3 incongruente Lösungen besitzt, welche in jedem Falle aus einer beliebigen unter ihnen erhalten werden können, indem man zu derselben der Reihe nach die 3^5 Lösungen der Congruenz $x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(6)}\equiv 0 \pmod 3$ addirt und die dabei auftretenden Zahlen auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul 3 reducirt, so erkennt man, dass von den an Stelle von A, beziehlich B auftretenden 3^6 ganzen Zahlen 3^5 der Zahl 0, 3^5 der Zahl 1, endlich 3^5 der Zahl -1 nach dem Modul 3 congruent sind, und dass daher die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right]$ bei der Ausführung der Summation 3^{10}-mal einer jeden der neun Normalcharakteristiken congruent wird. Nun ändert aber, wie die Formeln (4), (5) des Art. 1 zeigen, das auf der rechten Seite der obigen Thetaformel hinter dem Summenzeichen stehende Thetaproduct seinen Werth nicht, wenn man die Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right]$ durch eine ihr congruente ersetzt, und da auch die Exponentialgrösse $e^{-\frac{2}{3}AB\pi i}$ dadurch keine Aenderung erfährt, so kann man die in Rede stehende Summe von 3^{12} Gliedern durch das 3^{10}-fache derjenigen Summe ersetzen, die entsteht, wenn man in dem Ausdrucke:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(1)})\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(6)})e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}$$

an Stelle von $\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{smallmatrix}\right]$ der Reihe nach die neun Normalcharakteristiken treten lässt und die Summe der so entstehenden neun Terme bildet.

Dividirt man dann noch linke und rechte Seite der entstehenden Formel durch 3^{10}, so erhält man schliesslich die Formel:

$$(\Theta_0)\, 3\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(1)})\ldots\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(3u'^{(6)}) = \sum_{\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(1)})\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(6)})\, e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i},$$

wobei also die Summation auf der rechten Seite in der Weise auszuführen ist, dass an Stelle der Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{smallmatrix}\right]$ die sämmtlichen neun Normalcharakteristiken treten.

Lässt man in dieser Formel, indem man unter η, η' die Elemente einer beliebigen Charakteristik versteht:

$$u^{(1)} \text{ in } u^{(1)} + \left|\begin{smallmatrix}\eta\\\eta'\end{smallmatrix}\right|, \quad \text{also} \quad 3u^{(1)} \text{ in } 3u^{(1)} + \left|\begin{smallmatrix}3\eta\\3\eta'\end{smallmatrix}\right|$$

übergehen und berücksichtigt, dass dadurch:

$$3u'^{(1)}, \qquad 3u'^{(2)}, \qquad 3u'^{(3)}, \qquad \ldots, \qquad 3u'^{(6)}$$

beziehlich in:

$$3u'^{(1)} - \left|\begin{smallmatrix}2\eta\\2\eta'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u'^{(2)} + \left|\begin{smallmatrix}\eta\\\eta'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u'^{(3)} + \left|\begin{smallmatrix}\eta\\\eta'\end{smallmatrix}\right|,\ \ldots,\ 3u'^{(6)} + \left|\begin{smallmatrix}\eta\\\eta'\end{smallmatrix}\right|$$

übergehen, so erhält man unter Anwendung der Formeln (7), (8) und (4), (5) des Art. 1 und Fortlassung eines beiden Seiten gemeinsamen Factors die weitere Formel:

$$(\Theta_0') \qquad 3\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\\eta'\end{bmatrix}(3u'^{(1)})\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\\eta'\end{bmatrix}(3u'^{(6)})\, e^{-\frac{2}{3}\eta\eta'\pi i}$$
$$= \sum_{\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}} e^{\frac{2}{3}(\varepsilon\eta'-\varepsilon'\eta)\pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(1)})\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(6)})\, e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i}.$$

Aus der gewonnenen Formel erhält man jetzt die im Eingange dieses Artikels erwähnte allgemeine Formel auf folgende Weise. Man lasse:

$$3u^{(1)}, \qquad 3u^{(2)}, \qquad 3u^{(3)}, \qquad 3u^{(4)}, \qquad 3u^{(5)}, \qquad 3u^{(6)}$$

beziehlich in:

$$3u^{(1)},\ 3u^{(2)} + \left|\begin{smallmatrix}\varrho\\\varrho'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u^{(3)} - \left|\begin{smallmatrix}\varrho\\\varrho'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u^{(4)} + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa\\\varkappa'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u^{(5)} + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa+\sigma\\\varkappa'+\sigma'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u^{(6)} + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa-\sigma\\\varkappa'-\sigma'\end{smallmatrix}\right|$$

übergehen. Dadurch gehen:

$$3u'^{(1)}, \qquad 3u'^{(2)}, \qquad 3u'^{(3)} \qquad 3u'^{(4)}, \qquad 3u'^{(5)}, \qquad 3u'^{(6)}$$

beziehlich über in:

$$3u'^{(1)} + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa\\\varkappa'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u'^{(2)} + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa-\varrho\\\varkappa'-\varrho'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u'^{(3)} + \left|\begin{smallmatrix}\varkappa+\varrho\\\varkappa'+\varrho'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u'^{(4)},\ 3u'^{(5)} - \left|\begin{smallmatrix}\sigma\\\sigma'\end{smallmatrix}\right|,\ 3u'^{(6)} + \left|\begin{smallmatrix}\sigma\\\sigma'\end{smallmatrix}\right|,$$

und man erhält, indem man die so geänderten Argumente in die Formel (Θ_0') einführt und dann auf der rechten wie linken Seite die Formel (7) des Art. 1 anwendet, auch beide Seiten durch:

$$e^{-\frac{1}{\vartheta}(2\varrho^2+2\sigma^2+3\varkappa^2)a-2\varrho\left(u^{(2)}-u^{(3)}\right)-2\sigma\left(u^{(5)}-u^{(6)}\right)-2\varkappa\left(u^{(4)}+u^{(5)}+u^{(6)}\right)-\frac{4}{\vartheta}(\varrho\varrho'+\sigma\sigma')\pi i-\frac{4}{3}\varkappa\varkappa'\pi i}$$

dividirt und unter Anwendung der in Art. 3 eingeführten Symbole:

$$e^{-\frac{2}{3}\eta\eta'\pi i-\frac{2}{3}\varkappa\eta'\pi i+\frac{2}{3}\varkappa\varkappa'\pi i}=\tau^{|\eta|}\,.\,\tau^{|\eta+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa|\eta},$$

$$e^{-\frac{2}{3}\varepsilon\varepsilon'\pi i-\frac{2}{3}\varkappa\varepsilon'\pi i+\frac{2}{3}\varkappa\varkappa'\pi i}=\tau^{|\varepsilon|}\,.\,\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa|\varepsilon},$$

setzt, die gewünschte allgemeine Formel in der Gestalt:

$$\begin{aligned}(\Theta)\quad & 3\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\varkappa\\ \eta'+\varkappa'\end{bmatrix}(3u'^{(1)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\varkappa-\varrho\\ \eta'+\varkappa'-\varrho'\end{bmatrix}(3u'^{(2)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\varkappa+\varrho\\ \eta'+\varkappa'+\varrho'\end{bmatrix}(3u'^{(3)})\\ &\times\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(3u'^{(4)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta-\sigma\\ \eta'-\sigma'\end{bmatrix}(3u'^{(5)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{bmatrix}(3u'^{(6)})\,\tau^{|\eta|}\,.\,\tau^{|\eta+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa|\eta}\\ =&\sum_{\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}}\tau^{\varepsilon|\eta}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(1)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varrho\\ \varepsilon'+\varrho'\end{bmatrix}(3u^{(2)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon-\varrho\\ \varepsilon'-\varrho'\end{bmatrix}(3u^{(3)})\\ &\times\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{bmatrix}(3u^{(4)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa+\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'+\sigma'\end{bmatrix}(3u^{(5)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa-\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'-\sigma'\end{bmatrix}(3u^{(6)})\,\tau^{|\varepsilon|}\,.\,\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa|\varepsilon};\end{aligned}$$

dieselbe umfasst, da $[\eta]$, $[\varkappa]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ ganz beliebige Charakteristiken bezeichnen, die Formeln (Θ_0) und (Θ_0') als specielle Fälle.

5.

Setzt man in der gewonnenen Fundamentalformel:

$$\begin{aligned}&\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\varkappa\\ \eta'+\varkappa'\end{bmatrix}(3u'^{(1)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\varkappa-\varrho\\ \eta'+\varkappa'-\varrho'\end{bmatrix}(3u'^{(2)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\varkappa+\varrho\\ \eta'+\varkappa'+\varrho'\end{bmatrix}(3u'^{(3)})\\ \times&\vartheta\begin{bmatrix}\eta\\ \eta'\end{bmatrix}(3u'^{(4)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta-\sigma\\ \eta'-\sigma'\end{bmatrix}(3u'^{(5)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{bmatrix}(3u'^{(6)})\,\tau^{\eta}\,.\,\tau^{|\eta+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa|\eta}=x'_{[\eta]},\\ &\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(3u^{(1)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varrho\\ \varepsilon'+\varrho'\end{bmatrix}(3u^{(2)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon-\varrho\\ \varepsilon'-\varrho'\end{bmatrix}(3u^{(3)})\\ \times&\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{bmatrix}(3u^{(4)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa+\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'+\sigma'\end{bmatrix}(3u^{(5)})\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa-\sigma\\ \varepsilon'+\varkappa'-\sigma'\end{bmatrix}(3u^{(6)})\,\tau^{\varepsilon}\,.\,\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\,.\,\tau^{\varkappa|\varepsilon}=x_{[\varepsilon]},\end{aligned}$$

so nimmt dieselbe die Gestalt:

$$(F)\qquad 3x'_{[\eta]}=\sum_{[\varepsilon]}\tau^{\varepsilon|\eta}x_{[\varepsilon]}$$

an. Lässt man in dieser Gleichung an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die sämmtlichen neun Normalcharakteristiken treten und denkt sich jedesmal die auf der rechten Seite stehende Summation ausgeführt, so erhält man ein System von neun Gleichungen, denen man auf folgende Weise eine übersichtliche Gestalt geben kann. Man bezeichne allgemein die auf irgend eine bestimmte Charakteristik $[\eta]$ bezogene Grösse $x'_{[\eta]}$ mit x'_μ, wenn μ die der Charakteristik $[\eta]$ in der natürlichen Reihenfolge zukommende Stellenzahl ist; in gleicher Weise die auf irgend eine Charakteristik $[\varepsilon]$ bezogene Grösse $x_{[\varepsilon]}$ mit x_ν, wenn ν

die Stellenzahl der Charakteristik $[\varepsilon]$ ist. Die erwähnten neun Gleichungen nehmen dann die Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
3x_1' &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9,\\
3x_2' &= x_1 + x_2 + x_3 + \tau^2 x_4 + \tau^2 x_5 + \tau^2 x_6 + \tau x_7 + \tau x_8 + \tau x_9,\\
3x_3' &= x_1 + x_2 + x_3 + \tau x_4 + \tau x_5 + \tau x_6 + \tau^2 x_7 + \tau^2 x_8 + \tau^2 x_9,\\
3x_4' &= x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3 + x_4 + \tau x_5 + \tau^2 x_6 + x_7 + \tau x_8 + \tau^2 x_9,\\
(S)\quad 3x_5' &= x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3 + \tau^2 x_4 + x_5 + \tau x_6 + \tau x_7 + \tau^2 x_8 + x_9,\\
3x_6' &= x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3 + \tau x_4 + \tau^2 x_5 + x_6 + \tau^2 x_7 + x_8 + \tau x_9,\\
3x_7' &= x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3 + x_4 + \tau^2 x_5 + \tau x_6 + x_7 + \tau^2 x_8 + \tau x_9,\\
3x_8' &= x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3 + \tau^2 x_4 + \tau x_5 + x_6 + \tau x_7 + x_8 + \tau^2 x_9,\\
3x_9' &= x_1 + \tau^2 x_2 + \tau x_3 + \tau x_4 + x_5 + \tau^2 x_6 + \tau^2 x_7 + \tau x_8 + x_9,
\end{aligned}
$$

Das System dieser neun Gleichungen soll nun auf Grund der allgemeinen Gleichung (F) genauer untersucht werden, indem man zunächst ganz davon absieht, welche Bedeutung die x, x' ursprünglich haben, vielmehr darunter Grössen versteht, welche zwar den Gleichungen (S) genügen müssen, im Uebrigen aber keinerlei Beschränkungen unterworfen sind. Der Uebersichtlichkeit wegen möge es dabei gestattet sein, dieselbe Grösse $x'_{[\eta]}$ auch durch $x'_{[\zeta]}$, $x'_{[\vartheta]}$, zu bezeichnen, wenn nur die Charakteristiken $[\xi]$, $[\vartheta]$, ... der Normalcharakteristik $[\eta]$ congruent sind. Diese Bestimmung kann auch aufrecht erhalten bleiben, wenn man wieder zu den ursprünglich mit $x'_{[\eta]}$, $x_{[\varepsilon]}$ bezeichneten Thetaproducten zurückkehrt, insofern als dieselben — wie die Relationen (4), (5) des Art. 1 zeigen — ihren Werth nicht ändern, wenn man die Charakteristiken $[\eta]$ und $[\varepsilon]$ durch irgend welche ihnen congruente ersetzt. Da nun, wie schon früher erwähnt, auch der Werth des Ausdruckes $\tau^{\varepsilon|\eta}$ ungeändert bleibt, wenn man an Stelle der Charakteristik $[\varepsilon]$ oder $[\eta]$ eine ihr congruente setzt, so können bei der erwähnten Untersuchung congruente Charakteristiken einander vertreten. Mit Rücksicht darauf sollen im Folgenden unter „verschiedenen“ Charakteristiken nur solche verstanden werden, welche einander nicht congruent sind.

6.

Nach den gemachten Voraussetzungen gilt jetzt die Gleichung:

$$(F)\qquad 3x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} \tau^{\varepsilon|\eta} x_{[\varepsilon]}$$

für jede beliebige Charakteristik $[\eta]$. Lässt man nun in dieser Gleichung an Stelle von $[\eta]$ zuerst $[\eta + \alpha]$, sodann $[\eta - \alpha]$ treten, indem

man unter $[\alpha]$ eine beliebige von $[0]$ verschiedene Charakteristik versteht, multiplicirt auch die beiden dadurch aus (F') entstehenden Gleichungen beziehlich mit $\tau^{\alpha|\zeta}$ und $\tau^{\zeta|\alpha}$, wo $[\zeta]$ eine ganz beliebige Charakteristik bezeichnet, und addirt sie zu der ursprünglichen Gleichung (F'), so erhält man unter Berücksichtigung der Relationen $\tau^{\alpha|\zeta} = \tau^{-\zeta|\alpha}$ und $\tau^{\zeta|\alpha} = \tau^{-\zeta|-\alpha}$ zunächst:

$$3\left\{x'_{[\eta]} + \tau^{\alpha|\zeta}x'_{[\eta+\alpha]} + \tau^{\zeta|\alpha}x'_{[\eta-\alpha]}\right\} = \sum_{[\varepsilon]}\tau^{\varepsilon|\eta}\left\{1 + \tau^{\varepsilon-\zeta|\alpha} + \tau^{\varepsilon-\zeta|-\alpha}\right\}x_{[\varepsilon]}.$$

Der auf der rechten Seite in besondere Klammern eingeschlossene Ausdruck hat aber nach dem in Art. 4 Bemerkten nur für die drei Charakteristiken $[\varepsilon] = [\zeta]$, $[\zeta+\alpha]$, $[\zeta-\alpha]$ den Werth 3, für die übrigen sechs den Werth 0, und es nimmt daher, wenn man noch links und rechts mit 3 dividirt, diese Gleichung die Form:

$$(F') \quad x'_{[\eta]} + \tau^{\alpha|\zeta}x'_{[\eta+\alpha]} + \tau^{\zeta|\alpha}x'_{[\eta-\alpha]} = \tau^{\zeta|\eta}\left\{x_{[\zeta]} + \tau^{\alpha|\eta}x_{[\zeta+\alpha]} + \tau^{\eta|\alpha}x_{[\zeta-\alpha]}\right\}$$

an, wobei also $[\eta]$, $[\zeta]$ zwei ganz beliebige Charakteristiken bezeichnen, die auch einander gleich sein können, während $[\alpha]$ eine von $[0]$ verschiedene Charakteristik ist.

In der Gleichung (F') kann jetzt für $[\eta]$ und unabhängig davon für $[\zeta]$ eine jede der neun Normalcharakteristiken gesetzt werden. Es entstehen aber auf diese Weise, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, im Ganzen nur neun wesentlich verschiedene Gleichungen. Repräsentirt man nämlich, indem man unter $[\beta]$ eine beliebige von $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ verschiedene Charakteristik versteht, die neun Normalcharakteristiken durch die ihnen congruenten neun Charakteristiken des quadratischen Schemas:

$$\begin{array}{ccc} [0], & [\alpha], & [-\alpha], \\ [\beta], & [\beta+\alpha], & [\beta-\alpha], \\ [-\beta], & [-\beta+\alpha], & [-\beta-\alpha], \end{array}$$

und berücksichtigt, dass die Gleichung (F') wieder in sich selbst übergeht, sowohl, wenn man $[\eta]$, als auch, wenn man $[\zeta]$ um $[\alpha]$ oder $[-\alpha]$ vermehrt, so erkennt man, dass immer die drei in einer Horizontalreihe des obigen Schemas stehenden Charakteristiken, der Reihe nach in (F') an Stelle von $[\eta]$ oder $[\zeta]$ gesetzt, dieselbe Gleichung hervorbringen, und dass daher die Formel (F') bei festgehaltenem $[\alpha]$ im Ganzen nur neun verschiedene specielle Gleichungen umfasst, die man erhält, indem man der Reihe nach $[\eta] = [0]$, $[\beta]$, $[-\beta]$ setzt und jedesmal dann an Stelle von $[\zeta]$ die nämlichen drei Charakteristiken treten lässt. Bezeichnet man $x_{[\varepsilon]}$ einfach mit (ε), $x'_{[\varepsilon]}$ mit $(\varepsilon)'$, so können diese neun Gleichungen, wie folgt, geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
&(0)' + (\alpha)' + (-\alpha)' = (0) + (\alpha) + (-\alpha),\\
&(0)' + \tau^{\alpha|\beta}(\alpha)' + \tau^{\beta|\alpha}(-\alpha)' = (\beta) + (\beta+\alpha) + (\beta-\alpha),\\
&(0)' + \tau^{\beta|\alpha}(\alpha)' + \tau^{\alpha|\beta}(-\alpha)' = (-\beta) + (-\beta+\alpha) + (-\beta-\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\beta)' + (\beta+\alpha)' + (\beta-\alpha)' = (0) + \tau^{\alpha|\beta}(\alpha) + \tau^{\beta|\alpha}(-\alpha),\\
(S')\quad &(\beta)' + \tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha)' + \tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha)' = (\beta) + \tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha) + \tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha),\\
&(\beta)' + \tau^{\beta|\alpha}(\beta+\alpha)' + \tau^{\alpha|\beta}(\beta-\alpha)' = (-\beta) + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta+\alpha) + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta-\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-\beta)' + (-\beta+\alpha)' + (-\beta-\alpha)' = (0) + \tau^{\beta|\alpha}(\alpha) + \tau^{\alpha|\beta}(-\alpha),\\
&(-\beta)' + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta+\alpha)' + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta-\alpha)' = (\beta) + \tau^{\beta|\alpha}(\beta+\alpha) + \tau^{\alpha|\beta}(\beta-\alpha),\\
&(-\beta)' + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta+\alpha)' + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta-\alpha)' = (-\beta) + \tau^{\beta|\alpha}(-\beta+\alpha) + \tau^{\alpha|\beta}(-\beta-\alpha).
\end{aligned}
$$

Das so entstandene System (S') kann das ursprüngliche System (S), aus dem es abgeleitet wurde, in jeder Beziehung ersetzen, insofern als man von dem Systeme (S') aus, durch passende Verbindung der ihm angehörigen Gleichungen rückwärts wieder das ursprüngliche System (S) erhalten kann. Die in dem Systeme (S') vorkommende Charakteristik $[\beta]$ ist nur der Bedingung unterworfen, von $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ verschieden zu sein; setzt man aber an Stelle von $[\beta]$ irgend eine andere der sechs zulässigen Charakteristiken, so geht das System (S'), abgesehen von der Aufeinanderfolge der Gleichungen und der Anordnung der Glieder in denselben, wieder in sich selbst über, und man erkennt daher, dass das System (S') durch Angabe der Charakteristik $[\alpha]$ vollständig bestimmt ist. Berücksichtigt man nun weiter, dass für $[\alpha]$ eine jede der acht von $[0]$ verschiedenen Charakteristiken gesetzt werden darf, dass aber das System (S') ungeändert bleibt, wenn man die Charakteristik $[-\alpha]$ an Stelle der Charakteristik $[\alpha]$ treten lässt, so erkennt man, dass es im Ganzen überhaupt nur vier verschiedene specielle Systeme (S') giebt, welche man erhalten kann, wenn man an Stelle der Charakteristik $[\alpha]$ die Charakteristiken:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

und an Stelle von $[\beta]$ beziehlich die Charakteristiken:

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

setzt.

Um die vier so entstehenden speciellen Systeme (S') von je neun Gleichungen zu fixiren, berücksichtige man, dass in (S') allgemein (ε) die Grösse $x_{[\varepsilon]}$, $(\varepsilon)'$ die Grösse $x'_{[\varepsilon]}$ vertritt, ferner, dass nach früher getroffenem Uebereinkommen $x_{[\varepsilon]}$ auch durch x_ν, $x'_{[\varepsilon]}$ durch x_ν' bezeichnet werden kann, wenn ν die Stellenzahl der der Charakteristik $[\varepsilon]$ congruenten Normalcharakteristik ist. Denkt man sich nun die

Gleichungen zunächst unter Anwendung von x_ν, x_ν' angeschrieben und ersetzt dann x_ν einfach durch ν, x_ν' durch ν', so entsteht die nachfolgende Tabelle, in welcher die Gleichungen in der Weise zusammengestellt sind, dass die neun ein System (S') bildenden Gleichungen jedesmal in drei Horizontalreihen zusammenstehen.

$1'+2'+3'=1+2+3$	$4'+5'+6'=1+\tau 2+\tau^2 3$	$7'+8'+9'=1+\tau^2 2+\tau 3$
$1'+\tau 2'+\tau^2 3'=4+5+6$	$1'+\tau 5'+\tau^2 6'=4+\tau 5+\tau^2 6$	$7'+\tau 8'+\tau^2 9'=4+\tau^2 5+\tau 6$
$1'+\tau^2 2'+\tau 3'=7+8+9$	$4'+\tau^2 5'+\tau 6'=7+\tau 8+\tau^2 9$	$7'+\tau^2 8'+\tau 9'=7+\tau^2 8+\tau 9$
$1'+4'+7'=1+4+7$	$3'+6'+9'=1+\tau 4+\tau^2 7$	$2'+5'+8'=1+\tau^2 4+\tau 7$
$1'+\tau 4'+\tau^2 7'=3+6+9$	$3'+\tau 6'+\tau^2 9'=3+\tau 6+\tau^2 9$	$2'+\tau 5'+\tau^2 8'=3+\tau^2 6+\tau 9$
$1'+\tau^2 4'+\tau 7'=2+5+8$	$3'+\tau^2 6'+\tau 9'=2+\tau 5+\tau^2 8$	$2'+\tau^2 5'+\tau 8'=2+\tau^2 5+\tau 8$
$1'+5'+9'=1+5+9$	$3'+4'+8'=1+\tau 5+\tau^2 9$	$2'+6'+7'=1+\tau^2 5+\tau 9$
$1'+\tau 5'+\tau^2 9'=3+4+8$	$3'+\tau 4'+\tau^2 8'=3+\tau 4+\tau^2 8$	$2'+\tau 6'+\tau^2 7'=3+\tau^2 4+\tau 8$
$1'+\tau^2 5'+\tau 9'=2+6+7$	$3'+\tau^2 4'+\tau 8'=2+\tau 6+\tau^2 7$	$2'+\tau^2 6'+\tau 7'=2+\tau^2 6+\tau 7$
$1'+6'+8'=1+6+8$	$3'+5'+7'=1+\tau 6+\tau^2 8$	$2'+4'+9'=1+\tau^2 6+\tau 8$
$1'+\tau 6'+\tau^2 8'=3+5+7$	$3'+\tau 5'+\tau^2 7'=3+\tau 5+\tau^2 7$	$2'+\tau 4'+\tau^2 9'=3+\tau^2 5+\tau 7$
$1'+\tau^2 6'+\tau 8'=2+4+9$	$3'+\tau^2 5'+\tau 7'=2+\tau 4+\tau^2 9$	$2'+\tau^2 4'+\tau 9'=2+\tau^2 4+\tau 9$

Wie ein Blick auf die Gleichung (F') zeigt, welche die sechsunddreissig soeben aufgestellten Gleichungen als specielle Fälle enthält, stehen sowohl auf der rechten wie auf der linken Seite einer jeden dieser Gleichungen drei Grössen, deren zugehörige, den auftretenden Stellenzahlen entsprechende Normalcharakteristiken immer eine der Charakteristik [0] congruente Summe besitzen. Von drei verschiedenen Charakteristiken, deren Summe der Charakteristik [0] congruent ist, soll gesagt werden, dass sie ein Dreiersystem bilden. Man erkennt dann, dass die drei Charakteristiken eines Dreiersystems allgemein durch drei Charakteristiken von der Form $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ repräsentirt werden, und dass es, da congruente Charakteristiken hierbei als nicht verschieden anzusehen sind, im Ganzen zwölf verschiedene Dreiersysteme gibt, nämlich die folgenden:

$$\begin{matrix}
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right]; \\
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right]; \\
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]; \\
\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right]; & \left[\begin{smallmatrix}-1\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right].
\end{matrix}$$

Die zwölf hierzugehörigen Systeme von je drei Stellenzahlen stimmen mit den zwölf verschiedenen auf den rechten und linken Seiten der obigen sechsunddreissig Gleichungen vorkommenden Systemen von je drei Zahlen überein.

7.

Die sämmtlichen in den beiden vorigen Artikeln aufgestellten Gleichungen bleiben nach früher Bemerktem richtig, wenn man darin allgemein, d. h. für jede Charakteristik $[\eta]$, beziehlich $[\varepsilon]$:

$$x'_{[\eta]} = \vartheta[\eta+\varkappa](3u'^{(1)})\vartheta[\eta+\varkappa-\varrho](3u'^{(2)})\vartheta[\eta+\varkappa+\varrho](3u'^{(3)})$$
$$\times \vartheta[\eta](3u'^{(4)})\vartheta[\eta-\sigma](3u'^{(5)})\vartheta[\eta+\sigma](3u'^{(6)})\tau^{|\eta|}\cdot\tau^{|\eta+\varkappa|}\cdot\tau^{\varkappa|\eta},$$
$$x_{[\varepsilon]} = \vartheta[\varepsilon](3u^{(1)})\vartheta[\varepsilon+\varrho](3u^{(2)})\vartheta[\varepsilon-\varrho](3u^{(3)})$$
$$\times \vartheta[\varepsilon+\varkappa](3u^{(4)})\vartheta[\varepsilon+\varkappa+\sigma](3u^{(5)})\vartheta[\varepsilon+\varkappa-\sigma](3u^{(6)})\tau^{|\eta|}\cdot\tau^{|\varepsilon+\varkappa|}\cdot\tau^{\varkappa|\varepsilon}$$

setzt.

Aus der Fülle specieller Formeln, welche durch passende Verfügung über die willkürlichen Variablen u und die ebenfalls willkürlichen Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ erhalten werden können, sollen hier nur diejenigen abgeleitet werden, welche zur Lösung des im Eingange des Art. 4 gestellten Problems erforderlich sind.

Man setze, indem man unter u und v zwei beliebige Grössen versteht:

$$3u^{(1)} = 3u^{(2)} = 3u^{(3)} = u, \quad 3u^{(4)} = 3u^{(5)} = 3u^{(6)} = v;$$

dann wird den Gleichungen (J) gemäss:

$$3u'^{(1)} = 3u'^{(2)} = 3u'^{(3)} = v, \quad 3u'^{(4)} = 3u'^{(5)} = 3u'^{(6)} = u,$$

und die soeben mit $x'_{[\eta]}$, $x_{[\varepsilon]}$ bezeichneten Thetaproducte gehen durch Einführung dieser speciellen Werthe über in:

$$x'_{[\eta]} = \tau^{\varkappa|\eta}\vartheta[\eta](u)\vartheta[\eta+\sigma](u)\vartheta[\eta-\sigma](u)\tau^{|\eta|}$$
$$\times \vartheta[\varkappa+\eta](v)\vartheta[\varkappa+\eta+\varrho](v)\vartheta[\varkappa+\eta-\varrho](v)\tau^{|\varkappa+\eta|},$$
$$x_{[\varepsilon]} = \tau^{\varkappa|\varepsilon}\vartheta[\varepsilon](u)\vartheta[\varepsilon+\varrho](u)\vartheta[\varepsilon-\varrho](u)\tau^{|\varepsilon|}$$
$$\times \vartheta[\varkappa+\varepsilon](v)\vartheta[\varkappa+\varepsilon+\sigma](v)\vartheta[\varkappa+\varepsilon-\sigma](v)\tau^{|\varkappa+\varepsilon|}.$$

Ersetzt man nun in der Formel (F') die vorkommenden Grössen x', x mit Hülfe der letzten Gleichungen durch die ihnen entsprechenden Thetaproducte und bezeichnet, zugleich im Hinblicke auf spätere Formeln:

$$\vartheta[\alpha](u)\vartheta[\alpha+\beta](u)\vartheta[\alpha-\beta](u)\tau^{|\alpha|} \quad \text{mit} \quad \vartheta\{\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta\}(u),$$
$$\vartheta[\alpha](v)\vartheta[\alpha+\beta](v)\vartheta[\alpha-\beta](v)\tau^{|\alpha|} \quad \text{mit} \quad \vartheta\{\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta\}(v),$$
$$\vartheta[\alpha](0)\vartheta[\alpha+\beta](0)\vartheta[\alpha-\beta](0)\tau^{|\alpha|} \quad \text{mit} \quad (\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta),$$

und, dem Falle $[\beta] = [0]$ entsprechend:

$$\vartheta^3[\alpha](u)\tau^{|\alpha|} \text{ mit } \vartheta^3\{\alpha\}(u), \qquad \vartheta^3[\alpha](v)\tau^{|\alpha|} \text{ mit } \vartheta^3\{\alpha\}(v),$$
$$\vartheta^3[\alpha](0)\tau^{|\alpha|} \text{ mit } (\alpha)^3,$$

so geht aus der Formel (F') die Formel:

$$(\Theta') \quad \tau^{\varkappa|\eta}\vartheta\{\eta|\eta+\sigma|\eta-\sigma\}(u)\,\vartheta\{\varkappa+\eta|\varkappa+\eta+\varrho|\varkappa+\eta-\varrho\}(v)$$
$$+\tau^{\alpha|\zeta}\tau^{\varkappa|\eta+\alpha}\vartheta\{\eta+\alpha|\eta+\alpha+\sigma|\eta+\alpha-\sigma\}(u)$$
$$\cdot\vartheta\{\varkappa+\eta+\alpha|\varkappa+\eta+\alpha+\varrho|\varkappa+\eta+\alpha-\varrho\}(v)$$
$$+\tau^{\zeta|\alpha}\tau^{\varkappa|\eta-\alpha}\vartheta\{\eta-\alpha|\eta-\alpha+\sigma|\eta-\alpha-\sigma\}(u)$$
$$\cdot\vartheta\{\varkappa+\eta-\alpha|\varkappa+\eta-\alpha+\varrho|\varkappa+\eta-\alpha-\varrho\}(v)$$
$$=\tau^{\zeta|\eta}\tau^{\varkappa|\zeta}\vartheta\{\xi|\xi+\varrho|\xi-\varrho\}(u)\,\vartheta\{\varkappa+\xi|\varkappa+\xi+\sigma|\varkappa+\xi-\sigma\}(v)$$
$$+\tau^{\zeta+\alpha|\eta}\tau^{\varkappa|\zeta+\alpha}\vartheta\{\xi+\alpha|\xi+\alpha+\varrho|\xi+\alpha-\varrho\}(u)$$
$$\cdot\vartheta\{\varkappa+\xi+\alpha|\varkappa+\xi+\alpha+\sigma|\varkappa+\xi+\alpha-\sigma\}(v)$$
$$+\tau^{\zeta-\alpha|\eta}\tau^{\varkappa|\zeta-\alpha}\vartheta\{\xi-\alpha|\xi-\alpha+\varrho|\xi-\alpha-\varrho\}(u)$$
$$\cdot\vartheta\{\varkappa+\xi-\alpha|\varkappa+\xi-\alpha+\sigma|\varkappa+\xi-\alpha-\sigma\}(v)$$

hervor, aus der jetzt die oben erwähnten speciellen Gleichungen abgeleitet werden sollen.

Setzt man zunächst $[\varrho] = [\alpha]$, $[\sigma] = [\beta]$, $u = 0$ und vertauscht in der so entstehenden Formel dann die Buchstaben α und β, so entsteht die Formel:

$$(A)\quad \tau^{x\,|\,\eta}[(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)+\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}(\eta+\beta\,|\,\eta+\beta+\alpha\,|\,\eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}(\eta-\beta\,|\,\eta-\beta+\alpha\,|\,\eta-\beta-\alpha)]$$
$$\times\vartheta\{x+\eta\,|\,x+\eta+\beta\,|\,x+\eta-\beta\}\,(v)$$
$$=\tau^{\xi\,|\,\eta}(\xi\,|\,\xi+\beta\,|\,\xi-\beta)\,[\tau^{x\,|\,\zeta}\vartheta\{x+\xi\,|\,x+\xi+\alpha\,|\,x+\xi-\alpha\}\,(v)$$
$$+\tau^{\beta\,|\,\zeta+\eta}\tau^{x\,|\,\zeta+\beta}\vartheta\{x+\xi+\beta\,|\,x+\xi+\beta+\alpha\,|\,x+\xi+\beta-\alpha\}\,(v)$$
$$+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\beta}\tau^{x\,|\,\zeta-\beta}\vartheta\{x+\xi-\beta\,|\,x+\xi-\beta+\alpha\,|\,x+\xi-\beta-\alpha\}\,(v)\,].$$

Setzt man dagegen $[\varrho] = [0]$, $[\sigma] = [0]$, $u = 0$, so entsteht die Formel:

$$(B)\quad \tau^{x\,|\,\eta}(\eta)^3\vartheta^3\{x+\eta\}\,(v)+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}\tau^{x\,|\,\eta+\alpha}(\eta+\alpha)^3\vartheta^3\{x+\eta+\alpha\}\,(v)$$
$$+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}\tau^{x\,|\,\eta-\alpha}(\eta-\alpha)^3\vartheta^3\{x+\eta-\alpha\}\,(v)$$
$$=\tau^{\zeta\,|\,\eta}\tau^{x\,|\,\zeta}(\xi)^3\vartheta^3\{x+\xi\}\,(v)+\tau^{\zeta+\alpha\,|\,\eta}\tau^{x\,|\,\zeta+\alpha}(\xi+\alpha)^3\vartheta^3\{x+\xi+\alpha\}\,(v)$$
$$+\tau^{\zeta-\alpha\,|\,\eta}\tau^{x\,|\,\zeta-\alpha}(\xi-\alpha)^3\vartheta^3\{x+\xi-\alpha\,(v).$$

Zur Gewinnung weiterer Formeln setze man in (Θ') $[\varrho] = [\alpha]$, $[\sigma] = [0]$; es entsteht dann zunächst die Formel:

$$\tau^{x\,|\,\eta}\,[\vartheta^3\{\eta\}\,(u)+\tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}\vartheta^3\{\eta+\alpha\}\,(u)+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}\vartheta^3\{\eta-\alpha\}\,(u)]$$
$$\times\vartheta\{x+\eta\,|\,x+\eta+\alpha\,|\,x+\eta-\alpha\}\,(v)$$
$$=\tau^{\xi\,|\,\eta}\vartheta\{\xi\,|\,\xi+\alpha\,|\,\xi-\alpha\}\,(u)\,[\tau^{x\,|\,\zeta}\vartheta^3\{x+\xi\}\,(v)$$
$$+\tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}\tau^{x\,|\,\zeta+\alpha}\vartheta^3\{x+\xi+\alpha\}\,(v)+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}\tau^{x\,|\,\zeta-\alpha}\vartheta^3\{x+\xi-\alpha\}\,(v)\,].$$

Aus dieser Formel geht für $u = 0$ die Formel:

$$(C)\quad \tau^{x\,|\,\eta}[(\eta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}(\eta-\alpha)^3]$$
$$\times\vartheta\{x+\eta\,|\,x+\eta+\alpha\,|\,x+\eta-\alpha\}\,(v)$$
$$=\tau^{\xi\,|\,\eta}(\xi\,|\,\xi+\alpha\,|\,\xi-\alpha)\,[\tau^{x\,|\,\zeta}\vartheta^3\{x+\xi\}\,(v)$$
$$+\tau^{\alpha\,|\,\zeta+\eta}\tau^{x\,|\,\zeta+\alpha}\vartheta^3\{x+\xi+\alpha\}\,(v)+\tau^{\zeta+\eta\,|\,\alpha}\tau^{x\,|\,\zeta-\alpha}\vartheta^3\{x+\xi-\alpha\}\,(v)\,]$$

hervor; setzt man dagegen $[x] = [\xi-\eta]$, $u = v$ und entfernt den beiden Seiten gemeinsamen Factor $\vartheta\{\xi\,|\,\xi+\alpha\,|\,\xi-\alpha\}\,(v)$ durch Division, so entsteht, wenn man schliesslich noch an Stelle von $[\xi]$ die neue Charakteristik $[\varepsilon]$ einführt mit Hülfe der Gleichung $[\varepsilon] = [-\xi-\eta]$, nach leichten Umformungen die Formel:

$$(D)\quad \vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\varepsilon\,|\,\alpha}\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)+\tau^{\alpha\,|\,\varepsilon}\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$$
$$=\tau^{\eta\,|\,\varepsilon}\left[\vartheta^3\{\varepsilon\}(v)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}\vartheta^3\{\varepsilon+\alpha\}(v)+\tau^{\alpha\,|\,\eta}\vartheta^3\{\varepsilon-\alpha\}(v)\right].$$

Die Formeln (A), (B), (C), (D) bilden die Hülfsmittel für die weitere Untersuchung.

8.

Es sollen jetzt zunächst die zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$ bestehenden Beziehungen näher untersucht werden. Bezeichnet man mit $[\alpha]$ eine der $[0]$ nicht congruente Charakteristik, mit $[\beta]$ eine zweite Charakteristik, welche keiner der drei Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist, so bilden die Charakteristiken:

$$[0],\quad [\alpha],\quad [-\alpha],\quad [\beta],\quad [\beta+\alpha],\quad [\beta-\alpha],\quad [-\beta],$$
$$[-\beta+\alpha],\quad [-\beta-\alpha]$$

ein System von neun incongruenten Charakteristiken und sind daher den neun Normalcharakteristiken in irgend einer Reihenfolge congruent. Setzt man speciell $[\alpha]=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, $[\beta]=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, so geht das aufgestellte System in das System der neun Normalcharakteristiken in der natürlichen Reihenfolge über.

Die Relationen, welche sich aus den Formeln (A), (B), (C), (D) durch Specialisirung ergeben, enthalten ausschliesslich Grössen von der Form:

$$(\varrho)^3=\vartheta^3[\varrho](0)\,\tau^{|\,\varrho\,|}$$

und

$$(\varrho\,|\,\varrho+\sigma\,|\,\varrho-\sigma)=\vartheta[\varrho](0)\,\vartheta[\varrho+\sigma](0)\,\vartheta[\varrho-\sigma](0)\,\tau^{|\,\varrho\,|}.$$

Da diese Grössen ihren Werth nicht ändern, wenn man die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ durch irgend welche ihnen congruente ersetzt, so hat man, den neun Normalcharakteristiken entsprechend, zunächst neun Grössen von der Form $(\varrho)^3$, die mit Hülfe der oben eingeführten beliebigen Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ durch:

$$(0)^3,\quad (\alpha)^3,\quad (-\alpha)^3,\quad (\beta)^3,\quad (\beta+\alpha)^3,\quad (\beta-\alpha)^3,\quad (-\beta)^3,$$
$$(-\beta+\alpha)^3,\quad (-\beta-\alpha)^3$$

repräsentirt werden können. Da ferner die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\varrho+\sigma]$, $[\varrho-\sigma]$ immer ein Dreiersystem bilden, die Anzahl der verschiedenen aus Normalcharakteristiken gebildeten Dreiersystemen aber nach Art. 6 zwölf beträgt, auch ein Symbol $(\lambda\,|\,\mu\,|\,\nu)$ nur eine dritte Einheitswurzel als Factor erlangt, wenn man die Charakteristiken $[\lambda]$, $[\mu]$, $[\nu]$ durch irgend welche ihnen congruente ersetzt, so giebt es, wenn man von dritten Einheitswurzeln absieht, im Ganzen zwölf verschiedene Grössen von der Form $(\varrho\,|\,\varrho+\sigma\,|\,\varrho-\sigma)$, welche durch:

$$\begin{array}{lll} (0|\alpha|-\alpha) \quad , & (\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha), & (-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha), \\ (0|\beta|-\beta) \quad , & (\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta), & (-\alpha|-\alpha+\beta|-\alpha-\beta), \\ (0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha), & (\beta-\alpha\,2\beta|-2\alpha), & (-\beta+\alpha\,|\,2\alpha\,|-2\beta) \quad , \\ (0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha), & (\beta+\alpha|2\beta|2\alpha) \quad , & (-\beta-\alpha|-2\alpha|-2\beta) \end{array}$$

repräsentirt werden können. Setzt man speciell $[\alpha]=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$, $[\beta]=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, so geht das System dieser zwölf Grössen unmittelbar, d. h. ohne dass man dritte Einheitswurzeln hinzuzufügen braucht, in dasjenige über, welches den in Art. 6 angeschriebenen Dreiersystemen in der gewählten Anordnung entspricht. Berücksichtigt man nun weiter, dass nach Formel (6) des Art. 1 allgemein:

$$\vartheta[\varrho]\,(-v)=\vartheta[-\varrho]\,(v), \quad \text{also} \quad \vartheta[-\varrho]\,(0)=\vartheta[\varrho]\,(0),$$

auch $\tau^{|-\varrho|}=\tau^{|\varrho|}$ ist, und dass daher stets die Beziehungen:

$$(-\varrho)^3=(\varrho)^3, \quad (-\varrho_1-\varrho+\sigma|-\varrho-\sigma)=(\varrho\mid\varrho+\sigma\mid\varrho-\sigma)$$

bestehen, so folgt, dass sich die neun Grössen $(\varrho)^3$ auf die fünf:

$$(0)^3, \quad (\alpha)^3, \quad (\beta)^3, \quad (\beta+\alpha)^3, \quad (\beta-\alpha)^3,$$

die zwölf Grössen $(\varrho\mid\varrho+\sigma\mid\varrho-\sigma)$ auf die acht:

$$\begin{array}{llll} (0|\alpha|-\alpha) \quad , & (\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha) \;; & (0|\beta|-\beta) \quad , & (\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta), \\ (0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha), & (\beta-\alpha|2\beta\,|-2\alpha); & (0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha), & (\beta+\alpha|2\beta\,2\alpha) \end{array}$$

reduciren, und es ist nun die Aufgabe des Folgenden, die Relationen, welche zwischen diesen dreizehn Grössen bestehen, aus den Formeln (A), (B), (C), (D) abzuleiten.

Setzt man in der Formel (A) $v=0$, $[\varkappa]=[0]$, $[\eta]=[0]$, $[\xi]=[\varrho]$, $[\alpha]=[\varrho]$, $[\beta]=[\sigma]$ und lässt dann an Stelle von $[\varrho]$, $[\sigma]$ der Reihe nach die sechs Combinationen der Elemente $[\alpha]$, $[\beta]$ $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ zur zweiten Classe ohne Wiederholung treten, so entstehen die sechs Relationen:

$$(A_0)\quad \begin{aligned} &[(0|\alpha|-\alpha)-(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)]\,(0|\beta|-\beta) \\ &=(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)\,[(0|\alpha|-\alpha)+2(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)], \\ &[(0|\alpha|-\alpha)-\tau^{\alpha|\beta}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)]\,(0\,\beta+\alpha|-\beta-\alpha) \\ &=\tau^{\alpha|\beta}(\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha)\,[(0|\alpha|-\alpha)+2\tau^{\alpha|\beta}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)], \\ &[(0|\alpha|-\alpha)-\tau^{\beta|\alpha}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)]\,(0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha) \\ &=\tau^{\beta|\alpha}(\beta+\alpha|2\beta\,2\alpha)\,[(0|\alpha|-\alpha)+2\tau^{\beta|\alpha}(\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha)], \\ &[(0|\beta|-\beta)-\tau^{\beta|\alpha}(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)]\,(0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha) \\ &=\tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha\,2\beta|-2\alpha)\,[(0|\beta|-\beta)+2\tau^{\beta|\alpha}(\alpha\,\alpha+\beta|\alpha-\beta)], \\ &[(0|\beta|-\beta)-\tau^{\alpha|\beta}(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)]\,(0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha) \\ &=\tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha\,2\beta|2\alpha)\,[(0|\beta|-\beta)+2\tau^{\alpha|\beta}(\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta)], \\ &[(0\;\beta+\alpha|-\beta-\alpha)-(\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha)]\,(0|\beta-\alpha\,|-\beta+\alpha) \\ &=(\beta+\alpha|2\beta|2\alpha)\,[(0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha)+2(\beta-\alpha\,|2\beta|-2\alpha)], \end{aligned}$$

welche zugleich die sämmtlichen aus (A) hervorgehenden Relationen repräsentiren.

Setzt man ferner in der Formel (B) $v = 0$, $[\eta] = [0]$, $[\zeta] = [\beta]$ und lässt dann an Stelle von $[\varkappa]$ der Reihe nach die fünf Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\beta + \alpha]$, $[\beta - \alpha]$ treten, so entstehen die fünf Relationen:

$$
\begin{aligned}
&(0)^6 = (\alpha)^6 + (\beta)^6 + (\beta+\alpha)^6 + (\beta-\alpha)^6,\\
&(\alpha)^6 = (0)^3(\alpha)^3 + (\beta)^3(\beta+\alpha)^3 + (\beta+\alpha)^3(\beta-\alpha)^3 + (\beta-\alpha)^3(\beta)^3,\\
(B_0)\qquad &(\beta)^6 = (0)^3(\beta)^3 + (\alpha)^3(\beta+\alpha)^3 + (\beta+\alpha)^3(\beta-\alpha)^3 + (\beta-\alpha)^3(\alpha)^3,\\
&(\beta+\alpha)^6 = (0)^3(\beta+\alpha)^3 + (\alpha)^3(\beta-\alpha)^3 + (\beta-\alpha)^3(\beta)^3 + (\beta)^3(\alpha)^3,\\
&(\beta-\alpha)^6 = (0)^3(\beta-\alpha)^3 + (\alpha)^3(\beta)^3 + (\beta)^3(\beta+\alpha)^3 + (\beta+\alpha)^3(\alpha)^3,
\end{aligned}
$$

welche zugleich die sämmtlichen aus (B) hervorgehenden Relationen zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon]\,(0)$ repräsentiren.

Setzt man weiter in der Formel (C) das eine Mal $v = 0$, $[\eta] = [0]$, $[\xi] = [0]$, $[\alpha] = [\varrho]$, $[\beta] = [\sigma]$, $[\varkappa] = [\sigma]$, das andere Mal $v = 0$, $[\eta] = [0]$, $[\varkappa] = [0]$, $[\alpha] = [\varrho]$, $[\beta] = [\sigma]$, $[\zeta] = [\sigma]$ und setzt hierauf in jeder der beiden so entstandenen Gleichungen zunächst $[\varrho] = [\alpha]$, $[\sigma] = [\beta]$, dann $[\varrho] = [\beta]$, $[\sigma] = [\alpha]$, dann $[\varrho] = [\beta + \alpha]$, $[\sigma] = [\beta - \alpha]$, endlich $[\varrho] = [\beta - \alpha]$, $[\sigma] = [\beta + \alpha]$, so entstehen die folgenden vier Paare von Relationen:

$$
\begin{aligned}
&[(0)^3 + 2(\alpha)^3]\,(\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha)\\
&= (0 \mid \alpha \mid -\alpha)\,[(\beta)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\beta+\alpha)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3 - (\alpha)^3]\,(0 \mid \alpha \mid -\alpha)\\
&= (\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha)\,[(\beta)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\beta+\alpha)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3 + 2(\beta)^3]\,(\alpha \mid \alpha+\beta \mid \alpha-\beta)\\
&= (0 \mid \beta \mid -\beta)\,[(\alpha)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\beta+\alpha)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3 - (\beta)^3]\,(0 \mid \beta \mid -\beta)\\
(C_0)\qquad &= (\alpha \mid \alpha+\beta \mid \alpha-\beta)\,[(\alpha)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\beta+\alpha)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\beta-\alpha)^3],\\
&[(0)^3 + 2(\beta+\alpha)^3]\,(\beta-\alpha \mid 2\beta \mid -2\alpha)\\
&= (0 \mid \beta+\alpha \mid -\beta-\alpha)\,[(\beta-\alpha)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\beta)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\alpha)^3],\\
&[(0)^3 - (\beta+\alpha)^3]\,(0 \mid \beta+\alpha \mid -\beta-\alpha)\\
&= (\beta-\alpha \mid 2\beta \mid -2\alpha)\,[(\beta-\alpha)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\beta)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\alpha)^3],\\
&[(0)^3 + 2(\beta-\alpha)^3]\,(\beta+\alpha \mid 2\beta \mid 2\alpha)\\
&= (0 \mid \beta-\alpha \mid -\beta+\alpha)\,[(\beta+\alpha)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\beta)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\alpha)^3],\\
&[(0)^3 - (\beta-\alpha)^3]\,(0 \mid \beta-\alpha \mid -\beta+\alpha)\\
&= (\beta+\alpha \mid 2\beta \mid 2\alpha)\,[(\beta+\alpha)^3 + \tau^{\alpha\mid\beta}(\beta)^3 + \tau^{\beta\mid\alpha}(\alpha)^3].
\end{aligned}
$$

Setzt man endlich in der Gleichung (D) $v=0$, $[\eta]=[0]$, $[\varepsilon]=[\beta]$, so entsteht die Relation:

$$(D_0) \qquad (0)^3 = (\alpha)^3 + (\beta)^3 + (\beta+\alpha)^3 + (\beta-\alpha)^3.$$

Die aufgestellten Gleichungen (C_0), (D_0) repräsentiren zugleich die sämmtlichen in (C), (D) enthaltenen Relationen zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$. Ein Blick auf die gewonnenen Systeme (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) lässt erkennen, dass ein jedes dieser Systeme sich reproducirt, wenn man an Stelle der willkürlich gewählten Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ irgend zwei andere Charakteristiken setzt.

Die Gleichungen (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) sind nicht unabhängig von einander, vielmehr kann man auf verschiedene Weisen drei herausgreifen, aus denen sich dann die übrigen sämmtlich ableiten lassen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass aus den drei ersten Gleichungen des Systems (A_0) alle übrigen erhalten werden können. Zu dem Ende setze man:

$$\frac{(\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha)}{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)} = z_1, \qquad \frac{(\alpha\,|\,\alpha+\beta\,|\,\alpha-\beta)}{(0\,|\,\beta\,|\,-\beta)} = z_2,$$

$$\frac{(\beta-\alpha\,|\,2\beta\,|\,-2\alpha)}{(0\,|\,\beta+\alpha\,|\,-\beta-\alpha)} = z_3, \qquad \frac{(\beta+\alpha\,|\,2\beta\,|\,2\alpha)}{(0\,|\,\beta-\alpha\,|\,-\beta+\alpha)} = z_4.$$

Die drei genannten Gleichungen nehmen dann durch Einführung dieser Grössen die Form:

$$(1-z_1) = z_2(1+2z_1),$$

$$(1-\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_1) = \tau^{\alpha\,|\,\beta}z_3(1+2\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_1), \quad (1-\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_1) = \tau^{\beta\,|\,\alpha}z_4(1+2\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_1)$$

an. Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich je drei der Grössen z als gebrochene lineare Functionen der vierten darstellen, und es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die auftretenden linearen Functionen immer dieselben sind, einerlei, welche der vier Grössen z zur Darstellung benutzt wird. Aus den letzten Gleichungen ergeben sich nämlich fast unmittelbar die folgenden Relationen:

$$z_2 = \frac{1-z_1}{1+2z_1}, \quad \tau^{\alpha\,|\,\beta}z_3 = \frac{1-\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_1}{1+2\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_1}, \quad \tau^{\beta\,|\,\alpha}z_4 = \frac{1-\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_1}{1+2\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_1},$$

$$z_1 = \frac{1-z_2}{1+2z_2}, \quad \tau^{\alpha\,|\,\beta}z_4 = \frac{1-\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_2}{1+2\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_2}, \quad \tau^{\beta\,|\,\alpha}z_3 = \frac{1-\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_2}{1+2\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_2},$$

$$z_4 = \frac{1-z_3}{1+2z_3}, \quad \tau^{\alpha\,|\,\beta}z_1 = \frac{1-\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_3}{1+2\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_3}, \quad \tau^{\beta\,|\,\alpha}z_2 = \frac{1-\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_3}{1+2\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_3},$$

$$z_3 = \frac{1-z_4}{1+2z_4}, \quad \tau^{\alpha\,|\,\beta}z_2 = \frac{1-\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_4}{1+2\tau^{\alpha\,|\,\beta}z_4}, \quad \tau^{\beta\,|\,\alpha}z_1 = \frac{1-\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_4}{1+2\tau^{\beta\,|\,\alpha}z_4}.$$

Berücksichtigt man nun, dass man als Product von irgend drei der durch die z bezeichneten Quotienten, wenn man auf die ursprüngliche Bedeutung der die Zähler und Nenner bildenden Symbole zurückgeht, immer einen Quotienten von zwei Thetacuben erhält, sodass:

$$\frac{(\alpha)^3}{(0)^3} = z_2 z_3 z_4, \quad \frac{(\beta)^3}{(0)^3} = z_1 z_3 z_4, \quad \frac{(\beta+\alpha)^3}{(0)^3} = z_1 z_2 z_4, \quad \frac{(\beta-\alpha)^3}{(0)^3} = z_1 z_2 z_3$$

wird, so erkennt man, dass durch eine jede der vier Grössen z die sämmtlichen in den Formeln (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) nach passender Umformung auftretenden Quotienten von Thetaproducten und Thetacuben sich rational ausdrücken lassen, und dass in Folge der zwischen den Grössen z vorher aufgestellten Beziehungen die Form der entstehenden Ausdrücke unabhängig ist davon, welche der vier Grössen z man gewählt hat; für das Folgende soll die Grösse z_1 zu Grunde gelegt werden. Man erhält dann unmittelbar, wenn man, mit Unterdrückung des Index, $z_1 = z$ setzt:

$$(R_0) \qquad \begin{gathered} \frac{(\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha)}{(0 \mid \alpha \mid -\alpha)} = z, \\ \frac{(\alpha \mid \alpha+\beta \mid \alpha-\beta)}{(0 \mid \beta \mid -\beta)} = \frac{1-z}{1+2z}, \quad \frac{(\beta-\alpha \mid 2\beta \mid -2\alpha)}{(0 \mid \beta+\alpha \mid -\beta-\alpha)} = \tau^{\beta \mid \alpha} \frac{1-\tau^{\alpha \mid \beta} z}{1+2\tau^{\alpha \mid \beta} z}, \\ \frac{(\beta+\alpha \mid 2\beta \mid 2\alpha)}{(0 \mid \beta-\alpha \mid -\beta+\alpha)} = \tau^{\alpha \mid \beta} \frac{1-\tau^{\beta \mid \alpha} z}{1+2\tau^{\beta \mid \alpha} z}, \\ \frac{(\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{1-z^3}{1+8z^3}, \\ \frac{(\beta)^3}{(0)^3} = \frac{z(1+2z)}{1-z} \cdot \frac{1-z^3}{1+8z^3}, \quad \frac{(\beta+\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{\tau^{\alpha \mid \beta} z(1+2\tau^{\alpha \mid \beta} z)}{(1-\tau^{\alpha \mid \beta} z)} \cdot \frac{1-z^3}{1+8z^3}, \\ \frac{(\beta-\alpha)^3}{(0)^3} = \frac{\tau^{\beta \mid \alpha} z(1+2\tau^{\beta \mid \alpha} z)}{1-\tau^{\beta \mid \alpha} z} \cdot \frac{1-z^3}{1+8z^3}. \end{gathered}$$

Drückt man mit Hülfe der Gleichungen (R_0) die in den Relationen (A_0), (B_0), (C_0), (D_0) nach passender Umformung vorkommenden Quotienten von Thetaproducten und Thetacuben als Functionen von z aus, so wird eine jede dieser Gleichungen identisch erfüllt. Die vier oben aufgestellten Quotienten von Thetaproducten sind die einzigen Quotienten von je zwei der acht verschiedenen Grössen $(\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma)$, welche sich rational durch z ausdrücken; jeder andere derartige Quotient lässt sich dagegen, indem man ihn aus den vier Grössen $\frac{\vartheta[\alpha](0)}{\vartheta[0](0)}$, $\frac{\vartheta[\beta](0)}{\vartheta[0](0)}$, $\frac{\vartheta[\beta+\alpha](0)}{\vartheta[0](0)}$, $\frac{\vartheta[\beta-\alpha](0)}{\vartheta[0](0)}$ zusammensetzt und dann mit Hülfe der vier letzten Gleichungen (R_0) die Grösse z einführt, als dritte Wurzel aus einer rationalen Function von z darstellen.

9.

Es sollen jetzt auf Grund der allgemeinen Gleichungen (A), (B), (C), (D) die zwischen den Functionen $\vartheta[\varepsilon](v)$ bestehenden Beziehungen ermittelt werden. In den genannten Gleichungen kommen die neun Thetacuben $\vartheta^3\{\varrho\}(v)$ und die zwölf Producte von der Form $\vartheta\{\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma\}(v)$ vor; nur Producte von dieser Form sollen in der Folge unter „Thetaproducten" verstanden werden. Diese einundzwanzig Functionen von v, von denen die ersten neun ebenfalls als Producte von der Form $\vartheta\{\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma\}(v)$ angesehen werden können, wenn man für $[\sigma]$ die Charakteristik $[0]$ zulässt, gehören zu derselben Art, insofern als eine jede von ihnen, wenn man sie mit $f(v)$ bezeichnet, den Gleichungen:

$$f(v+\pi i) = f(v), \quad f(v+a) = f(v)\, e^{-3(2v+a)}$$

genügt, und es können daher auf Grund eines bekannten Satzes*) der Functionentheorie durch drei beliebig gewählte dieser einundzwanzig Functionen, vorausgesetzt, dass diese drei linearunabhängig sind, die achtzehn übrigen linear ausgedrückt werden. Je achtzehn solche Gleichungen bilden dann einen vollständigen Ersatz der sämmtlichen in den Formeln (A), (B), (C), (D) enthaltenen Gleichungen, insofern als eine jede dieser letzteren aus ihnen, unter Zuhülfenahme der zwischen den Grössen $\vartheta[\varepsilon](0)$ bestehenden Relationen, abgeleitet werden kann. Im Folgenden soll diese Reduction der sämmtlichen Gleichungen auf achtzehn auf zwei Weisen durchgeführt werden, das eine Mal, indem man drei Producte von der Form $\vartheta\{\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma\}(v)$, die zusammen alle neun Charakteristiken enthalten, zu Grunde legt, das andere Mal, indem man von drei Thetacuben ausgeht, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden.

Zur Lösung der ersten Aufgabe übergehend, bezeichne man mit $[\alpha]$ eine beliebige der $[0]$ nicht congruente Charakteristik, mit $[\beta]$ eine zweite Charakteristik, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist. Drei Thetaproducte, welche zusammen alle neun Charakteristiken enthalten, können dann bei passend gewähltem $[\alpha]$ und $[\beta]$ immer in die Form $\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$, $\vartheta\{\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha\}(v)$, $\vartheta\{-\beta \mid -\beta+\alpha \mid -\beta-\alpha\}(v)$ gebracht werden. Durch diese drei Producte als Fundamentalfunctionen sollen jetzt die achtzehn übrigen linear ausgedrückt werden.

Zu dem Ende setze man in (A) $[\varkappa] = [0]$, $[\xi] = [0]$ und lasse in der entstehenden Formel:

*) Prym, a. a. O. pag. 31.

$$(I_1)\quad [(\eta|\eta+\alpha|\eta-\alpha)+\tau^{\beta|\eta}(\eta+\beta|\eta+\beta+\alpha|\eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\eta|\beta}(\eta-\beta|\eta-\beta+\alpha|\eta-\beta-\alpha)]\vartheta\{\eta|\eta+\beta|\eta-\beta\}(v)$$
$$=(0|\beta|-\beta)\,[\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)+\tau^{\beta|\eta}\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\eta|\beta}\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)]$$

an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ treten; man erhält dann zunächst die drei Thetaproducte:

$\vartheta\{0|\beta|-\beta\}(v)$, $\vartheta\{\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta\}(v)$, $\vartheta\{-\alpha|-\alpha+\beta|-\alpha-\beta\}(v)$

durch die drei Fundamentalfunctionen ausgedrückt. Setzt man weiter in (I_1) an Stelle von $[\beta]$ die Charakteristik $[\beta+\alpha]$, so entsteht nach einfachen Umformungen die Formel:

$$(I_2)\quad [(\eta|\eta+\alpha\ \eta-\alpha)+\tau^{\beta-\eta|\beta-\alpha}(\eta+\beta|\eta+\beta+\alpha|\eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\beta+\eta|\beta-\alpha}(\eta-\beta|\eta-\beta+\alpha|\eta-\beta-\alpha)]$$
$$\times\vartheta\{\eta|\eta+\beta+\alpha|\eta-\beta-\alpha\}(v)$$
$$=(0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha)\,[\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)+\tau^{\beta+\alpha|\beta+\eta}\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\beta+\alpha,\beta-\eta}\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)],$$

und auf ähnliche Weise, indem man $[\beta-\alpha]$ an Stelle von $[\beta]$ setzt, die Formel:

$$(I_3)\quad [(\eta|\eta+\alpha|\eta-\alpha)+\tau^{\beta-\eta|\beta+\alpha}(\eta+\beta|\eta+\beta+\alpha|\eta+\beta-\alpha)$$
$$+\tau^{\beta+\eta|\beta+\alpha}(\eta-\beta|\eta-\beta+\alpha|\eta-\beta-\alpha)]$$
$$\times\vartheta\{\eta|\eta+\beta-\alpha|\eta-\beta+\alpha\}(v)$$
$$=(0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha)\,[\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)+\tau^{\beta-\alpha|\beta+\eta}\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\beta-\alpha,\beta-\eta}\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)].$$

Die Formel (I_2) liefert für $[\eta]=[0]$, $[\beta-\alpha]$, $[-\beta+\alpha]$ die Ausdrücke für die drei Producte:

$\vartheta\{0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)$, $\vartheta\{\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha\}(v)$, $\vartheta\{-\beta+\alpha\,2\alpha|-2\beta\}(v)$,

die Formel (I_3) für $[\eta]=[0]$, $[\beta+\alpha]$, $[-\beta-\alpha]$ die Ausdrücke für die drei noch übrigen Producte:

$\vartheta\{0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha\}(v)$, $\vartheta\{\beta+\alpha|2\beta|2\alpha\}(v)$, $\vartheta\{-\beta-\alpha|-2\alpha|-2\beta\}(v)$.

Es handelt sich jetzt noch darum, eine beliebige Function $\vartheta^3\{\xi\}(v)$ durch die drei Fundamentalfunctionen auszudrücken. Setzt man in der Formel (C) $[\varkappa]=[0]$, lässt sodann an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\beta]$, $[-\beta]$ treten und addirt linke wie rechte Seiten der entstehenden Gleichungen, so erhält man die Formel:

$$(II)\quad 3(\xi|\xi+\alpha|\xi-\alpha)\vartheta^3\{\xi\}(v)$$
$$=[(0)^3+\tau^{\alpha|\xi}(\alpha)^3+\tau^{\xi|\alpha}(-\alpha)^3]\cdot\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\beta|\xi}[(\beta)^3+\tau^{\alpha|\xi+\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\xi+\beta|\alpha}(\beta-\alpha)^3]\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\xi|\beta}[(-\beta)^3+\tau^{\alpha|\xi-\beta}(-\beta+\alpha)^3+\tau^{\xi-\beta|\alpha}(-\beta-\alpha)^3]\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v),$$

welche die gewünschten Ausdrücke für die neun Thetacuben liefert, wenn man für $[\zeta]$ der Reihe nach die neun Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$, $[\beta]$, $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$, $[-\beta]$, $[-\beta+\alpha]$, $[-\beta-\alpha]$ setzt.

Zwischen den drei auf den rechten Seiten von (I), (II) als Fundamentalfunctionen auftretenden Thetaproducten besteht zwar keine lineare Relation, jedoch sind dieselben durch eine homogene Gleichung dritten Grades mit einander verknüpft. Man gelangt zu derselben auf folgende Weise. Lässt man in der Gleichung (II) an Stelle von $[\zeta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ treten und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{(0)^3+(\alpha)^3+(-\alpha)^3}{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)} = C_0,$$

$$\frac{(\beta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(\beta-\alpha)^3}{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)} = \frac{(-\beta)^3+\tau^{\beta\,|\,\alpha}(-\beta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\beta}(-\beta-\alpha)^3}{(0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha)} = C,$$

so entstehen die drei Gleichungen:

$$3\vartheta^3\left\{\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right\}(v) = C_0\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v) + C\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v) + C\vartheta\{-\beta\,|\,-\beta+\alpha\,|\,-\beta-\alpha\}(v),$$

$$3\vartheta^3\left\{\begin{smallmatrix}\alpha\\0\end{smallmatrix}\right\}(v) = C_0\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v) + \tau^{\beta\,|\,\alpha}C\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v) + \tau^{\alpha\,|\,\beta}C\vartheta\{-\beta\,|\,-\beta+\alpha\,|\,-\beta-\alpha\}(v),$$

$$3\vartheta^3\left\{\begin{smallmatrix}-\alpha\\0\end{smallmatrix}\right\}(v) = C_0\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v) + \tau^{\alpha\,|\,\beta}C\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v) + \tau^{\beta\,|\,\alpha}C\vartheta\{-\beta\,|\,-\beta+\alpha\,|\,-\beta-\alpha\}(v).$$

Multiplicirt man linke und rechte Seiten dieser drei Gleichungen mit einander und beachtet dabei, dass identisch:

$$(a+b+c)(a+\tau^{\alpha\,|\,\beta}b+\tau^{\beta\,|\,\alpha}c)(a+\tau^{\beta\,|\,\alpha}b+\tau^{\alpha\,|\,\beta}c) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

ist, auch, dass der eingeführten abgekürzten Bezeichnung entsprechend die Beziehung:

$$\vartheta^3\{0\}(v)\vartheta^3\{\alpha\}(v)\vartheta^3\{-\alpha\}(v) = \vartheta^3\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v)\tau^{|\alpha|}\cdot\tau^{|\alpha|}$$

besteht, so erhält man zunächst:

$$(C_0^3-27\tau^{\alpha|}\cdot\tau^{|\alpha|})\vartheta^3\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v) + C^3\vartheta^3\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v) + C^3\vartheta^3\{-\beta\,|\,-\beta+\alpha\,|\,-\beta-\alpha\}(v) - 3C_0C^2\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v)\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v) \times\vartheta\{-\beta\,|\,-\beta+\alpha\,|\,-\beta-\alpha\}(v) = 0.$$

Nun findet man aber mit Hülfe der Gleichungen (R_0) des Art. 8 leicht, dass:

$$C_0^3 - 27\tau^{|\alpha|}\cdot\tau^{|\alpha|} = C^3$$

ist; dividirt man daher linke und rechte Seite der obigen Gleichung durch C^3 und ersetzt dann in dem auftretenden Quotienten $\frac{C_0}{C}$ die

Grössen C_0 und C durch das, was sie bedeuten, so erhält man schliesslich die gewünschte Gleichung dritten Grades*) in der Gestalt:

$$\text{(III)} \qquad \vartheta^3\{0|\alpha|-\alpha\}(v)$$
$$+\vartheta^3\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)+\vartheta^3\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)$$
$$-3\frac{(0)^3+(\alpha)^3+(-\alpha)^3}{(\beta)^3+\tau^{\alpha|\beta}(\beta+\alpha)^3+\tau^{\beta|\alpha}(\beta-\alpha)^3}\vartheta\{0|\alpha,-\alpha\}(v)\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)$$
$$\times\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)=0.$$

Das System der drei im Vorigen als Fundamentalfunctionen benutzten Thetaproducte ist durch die Wahl der Charakteristik $[\alpha]$ vollständig bestimmt, insofern als die drei Producte, von dritten Einheitswurzeln abgesehen, immer wieder erhalten werden, wenn man an Stelle von $[\beta]$ irgend eine andere der fünf bei bestimmten $[\alpha]$ zulässigen Charakteristiken setzt. Da aber weiter das System der drei Producte auch in sich übergeht, wenn man $[\alpha]$ mit $[-\alpha]$ vertauscht, so erkennt man, dass man im Ganzen nur vier verschiedene Systeme von je drei Producten der betrachteten Art und daher auch nur vier wesentlich verschiedene Systeme von Gleichungen (I), (II), (III) erhält, wenn man an Stelle der Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ auf alle möglichen Weisen specielle Charakteristiken einführt. Betrachtet man $[\alpha]$ und $[\beta]$ als feste Charakteristiken, so erhält man die drei noch übrigen Systeme, indem man $[\alpha]$, $[\beta]$ einmal durch $[\beta]$, $[\alpha]$, dann durch $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$, endlich durch $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$ ersetzt.

Die zweite der oben gestellten Aufgaben bezieht sich auf den Fall, wo drei Thetacuben, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden, als Fundamentalfunctionen zu Grunde gelegt werden. Bezeichnet man mit $[\eta]$ eine beliebige, mit $[\alpha]$ eine der $[0]$ nicht congruente Charakteristik, so können drei solche Thetacuben bei passender Wahl von $[\eta]$ und $[\alpha]$ stets in die Form $\vartheta^3\{\eta\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$ gebracht werden.

Um durch diese zunächst einen anderen Thetacubus $\vartheta^3\{\xi\}(v)$ auszudrücken, setze man in der Formel (B) der Reihe nach $[\varkappa]=[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ und eliminire aus den so entstehenden drei Gleichungen die beiden Functionen $\vartheta^3\{\xi+\alpha\}(v)$, $\vartheta^3\{\xi-\alpha\}(v)$. Führt man die etwas weitläufige Rechnung aus und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{(\eta)^3+\tau^{\alpha|\eta+\zeta}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\eta+\zeta|\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\xi)^3+\tau^{\xi|\alpha}(\xi+\alpha)^3+\tau^{\alpha|\xi}(\xi-\alpha)^3}=c_1,$$
$$\frac{(\eta)^3+\tau^{\alpha|\eta-\zeta}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\eta-\zeta|\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\xi)^3+(\xi+\alpha)^3+(\xi-\alpha)^3}=c_2,$$

*) Vergl. Bianchi, a. a. O. pag. 240.

$$\frac{(\eta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\eta}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\eta\,|\,\alpha}(\eta-\alpha)^3}{(\zeta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}(\zeta-\alpha)^3}=c_3,$$

so erhält man die Formel:

(I′)
$$3\tau^{\zeta\,|\,\eta}\vartheta^3\{\zeta\}(v)$$
$$=(c_1+c_2+c_3)\vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}(c_1+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}c_2+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}c_3)\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$$
$$+\tau^{\alpha\,|\,\eta}(c_1+\tau^{\alpha\,|\,\zeta}c_2+\tau^{\zeta\,|\,\alpha}c_3)\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v);$$

mit Hülfe derselben kann man jeden der sechs von den drei Fundamentalfunctionen verschiedenen Thetacuben durch diese drei ausdrücken, während sie für $[\xi]=[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ in eine Identität übergeht.

Um weiter die Formeln zu erhalten, welche die zwölf Thetaproducte durch die drei zu Grunde gelegten Cuben ausdrücken, setze man in (C) $[\varkappa]=[0]$; man erhält dann zunächst die Formel:

(II_1')
$$\vartheta\{\xi|\xi+\alpha|\xi-\alpha\}(v)$$
$$=\tau^{\eta\,|\,\zeta}\frac{(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)}{(\zeta)^3+\tau^{\alpha\,|\,\eta+\zeta}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\eta+\zeta\,|\,\alpha}(\zeta-\alpha)^3}$$
$$\left[\vartheta^3\{\eta\}(v)+\tau^{\alpha\,|\,\eta+\zeta}\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)+\tau^{\eta+\zeta\,|\,\alpha}\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)\right],$$

welche die Ausdrücke für die drei bei festgehaltener Charakteristik $[\alpha]$ in der Form $\vartheta\{\xi\,|\,\xi+\alpha\,|\,\xi-\alpha\}(v)$ darstellbaren Producte liefert. Irgend eines der neun noch übrigen Producte kann nun, wenn man unter $[\beta]$ eine Charakteristik versteht, welche keiner der drei Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist, bei passend gewählten $[\beta]$ und $[\xi]$ in der Form $\vartheta\{\xi\,|\,\xi+\beta\,|\,\xi-\beta\}(v)$ dargestellt werden. Um ein solches Product durch die drei Fundamentalfunctionen auszudrücken, stelle man dasselbe mittelst der Formel (I) als lineare Function der drei Producte $\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|\,-\alpha\}(v)$, $\vartheta\{\beta\,|\,\beta+\alpha\,|\,\beta-\alpha\}(v)$, $\vartheta\{-\beta\,|\,-\beta+\alpha\,|\,-\beta-\alpha\}(v)$ dar und ersetze dann jedes dieser drei Producte mit Hülfe der Formel (II_1') durch die ihm entsprechende lineare Function der Cuben $\vartheta^3\{\eta\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta+\alpha\}(v)$, $\vartheta^3\{\eta-\alpha\}(v)$; vereinigt man sodann die auftretenden Constanten in passender Weise und setzt zur Abkürzung:

$$\frac{(\eta\,\eta+\beta\,\eta-\beta)+\tau^{\alpha|\eta+\zeta}(\eta+\alpha\,\eta+\alpha+\beta|\eta+\alpha-\beta)+\tau^{\eta+\zeta|\alpha}(\eta-\alpha|\eta-\alpha+\beta|\eta-\alpha-\beta)}{(\zeta)^3+\tau^{\zeta|\alpha}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\alpha|\zeta}(\zeta-\alpha)^3}=c_1',$$

$$\frac{(\eta\,\eta+\beta|\eta-\beta)+\tau^{\alpha|\eta-\zeta}(\eta+\alpha\,\eta+\alpha+\beta\,\eta+\alpha-\beta)+\tau^{\eta-\zeta\,\alpha}(\eta-\alpha|\eta-\alpha+\beta\,\eta-\alpha-\beta)}{(\zeta)^3+(\zeta+\alpha)^3+(\zeta-\alpha)^3}=c_2',$$

$$\frac{(\eta\,\eta+\beta|\eta-\beta)+\tau^{\alpha\,|\,\eta}(\eta+\alpha|\eta+\alpha+\beta\,\eta+\alpha-\beta)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}(\eta-\alpha\,\eta-\alpha+\beta\,\eta-\alpha-\beta)}{(\zeta)^3+\tau^{\alpha|\zeta}(\zeta+\alpha)^3+\tau^{\zeta|\alpha}(\zeta-\alpha)^3}=c_3',$$

so erhält man die gewünschte Formel in der Gestalt:

$$(\mathrm{II}_2') \qquad 3\tau^{\xi\,|\,\eta}\vartheta\left\{\xi \mid \xi+\beta \mid \xi-\beta\right\}(v)$$
$$=(c_1'+c_2'+c_3')\,\vartheta^3\left\{\eta\right\}(v)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}(c_1'+\tau^{\xi\,|\,\alpha}c_2'+\tau^{\alpha\,|\,\xi}c_3')\,\vartheta^3\left\{\eta+\alpha\right\}(v)$$
$$+\tau^{\alpha\,|\,\eta}(c_1'+\tau^{\alpha\,|\,\xi}c_2'+\tau^{\xi\,|\,\alpha}c_3')\,\vartheta^3\left\{\eta-\alpha\right\}(v).$$

Ebenso wie bei der vorhergehenden Untersuchung die drei als Fundamentalfunctionen zu Grunde gelegten Thetaproducte, so sind auch hier die drei Cuben $\vartheta^3\left\{\eta\right\}(v)$, $\vartheta^3\left\{\eta+\alpha\right\}(v)$, $\vartheta^3\left\{\eta-\alpha\right\}(v)$ durch eine homogene Gleichung dritten Grades verknüpft. Setzt man nämlich in (II_1') $[\eta]=[\xi]$, so entsteht die Formel:

$$(\mathrm{III}_0') \qquad \vartheta^3\left\{\eta\right\}(v)+\tau^{\eta\,|\,\alpha}\vartheta^3\left\{\eta+\alpha\right\}(v)+\tau^{\alpha\,|\,\eta}\vartheta^3\left\{\eta-\alpha\right\}(v)$$
$$-\frac{(\eta)^3+\tau^{\eta\,|\,\alpha}(\eta+\alpha)^3+\tau^{\alpha\,|\,\eta}(\eta-\alpha)^3}{(\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha)}\,\vartheta\left\{\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha\right\}(v)=0,$$

welche unmittelbar die gewünschte Gleichung dritten Grades ergibt, wenn man das letzte Glied der linken Seite auf die rechte schafft und dann unter Berücksichtigung der Relation:

$$\vartheta^3\left\{\eta\,|\,\eta+\alpha\,|\,\eta-\alpha\right\}(v)=\tau^{|\,\alpha\,|}\vartheta^3\left\{\eta\right\}(v)\,\vartheta^3\left\{\eta+\alpha\right\}(v)\,\vartheta^3\left\{\eta-\alpha\right\}(v)$$

linke und rechte Seite zur dritten Potenz erhebt. In diesem Sinne soll die Gleichung (III_0') nicht als besonderer Fall der Gleichung (II_1') sondern als Repräsentant der zwischen den drei als Fundamentalfunctionen gewählten Cuben bestehenden Relation angesehen werden.

Das System der Gleichungen (I'), (II'), (III') ist durch die drei als Fundamentalfunctionen zu Grunde gelegten Thetacuben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die drei Charakteristiken $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ vollständig bestimmt. Diese drei Charakteristiken bilden immer ein Dreiersystem, und es giebt daher, da nach Früherem nur zwölf verschiedene Dreiersysteme existiren, auch nur zwölf verschiedene Systeme von Gleichungen (I'), (II'), (III_0'). Betrachtet man $[\alpha]$ als eine feste Charakteristik und bezeichnet mit $[\beta]$ eine Charakteristik, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[-\alpha]$ congruent ist, so gehen diese zwölf Systeme von Gleichungen aus dem hier aufgestellten hervor, indem man an Stelle des Charakteristikenpaares $[\eta]$, $[\alpha]$ der Reihe nach die zwölf Paare $[0]$, $[\alpha]$; $[\beta]$, $[\alpha]$; $[-\beta]$, $[\alpha]$; $[0]$, $[\beta]$; $[\alpha]$, $[\beta]$; $[-\alpha]$, $[\beta]$; $[0]$, $[\beta+\alpha]$; $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$; $[-\beta+\alpha]$, $[\beta+\alpha]$; $[0]$, $[\beta-\alpha]$; $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$; $[-\beta-\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ treten lässt.

10.

Die beiden im vorigen Artikel behandelten Aufgaben haben zu folgenden Resultaten geführt. Setzt man der ersten Aufgabe entsprechend:

$$\Phi_1 = \vartheta\left\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\right\}(v), \quad \Phi_2 = \vartheta\left\{\beta \mid \beta+\alpha \mid \beta-\alpha\right\}(v),$$
$$\Phi_3 = \vartheta\left\{-\beta \mid -\beta+\alpha \mid -\beta-\alpha\right\}(v),$$

der zweiten Aufgabe entsprechend:

$$\Psi_1 = \vartheta[\eta](v), \quad \Psi_2 = \vartheta[\eta+\alpha](v), \quad \Psi_3 = \vartheta[\eta-\alpha](v),$$

so lässt sich eine jede der im vorigen Artikel definirten einundzwanzig Functionen sowohl durch die drei Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, auf Grund der Gleichungen (I), (II), als auch durch die drei Functionen ${\Psi_1}^3$, ${\Psi_2}^3$, ${\Psi_3}^3$, auf Grund der Gleichungen (I′), (II′), linear ausdrücken, und es sind zudem im ersten Falle die drei Functionen Φ durch eine Gleichung dritten Grades (Gleichung (III)) von der Form:

$$\text{(III)} \qquad {\Phi_1}^3 + {\Phi_2}^3 + {\Phi_3}^3 - \varkappa\Phi_1\Phi_2\Phi_3 = 0,$$

im zweiten Falle die drei Functionen Ψ durch eine Gleichung dritten Grades (Gleichung (III_0')) von der Form:

$$\text{(III′)} \qquad {\Psi_1}^3 + \tau'{\Psi_2}^3 + \tau''{\Psi_3}^3 - \varkappa'\Psi_1\Psi_2\Psi_3 = 0$$

verknüpft, wobei $\varkappa$, $\varkappa'$ Constante, τ', τ'' dritte Einheitswurzeln bezeichnen.

Beachtet man nun, dass die Beziehungen zwischen den einundzwanzig Functionen $\vartheta^3\left\{\varrho\right\}(v)$, $\vartheta\left\{\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma\right\}(v)$ durch Gleichungen dargestellt werden, welche sämmtlich in Bezug auf diese Functionen homogen sind, und dass in Folge dessen nur die Verhältnisse dieser einundzwanzig Functionen, also auch nur die Verhältnisse $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_3}{\Phi_1}$, beziehlich $\frac{\Psi_2}{\Psi_1}$, $\frac{\Psi_3}{\Psi_1}$ in Betracht kommen, dass aber sowohl zwischen den beiden Quotienten $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ und $\frac{\Phi_3}{\Phi_1}$, als auch zwischen den beiden Quotienten $\frac{\Psi_2}{\Psi_1}$ und $\frac{\Psi_3}{\Psi_1}$, den soeben mit (III), (III′) bezeichneten Gleichungen entsprechend, eine Gleichung dritten Grades besteht, so ergibt sich schliesslich, dass die sämmtlichen Quotienten der einundzwanzig soeben bezeichneten Functionen, sowohl von den Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 als auch von den Functionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ausgehend, durch eine einzige Hülfsvariable algebraisch ausgedrückt werden können. Gegen die Zugrundelegung der — als einfachste Functionen zunächst ins Auge zu fassenden — Functionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 spricht die äusserst complicirte Gestalt der dann zur Anwendung kommenden Gleichungen (I′), (II′), während bei der Zugrundelegung der Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 und dadurch bedingter Anwendung der Gleichungen (I), (II), (III) die Endausdrücke sich ungemein einfach gestalten. Es zeigt sich also auch hier, ebenso wie bei der früheren Untersuchung über die Nullwerthe der Functionen, dass nicht bei den Thetacuben oder, was dasselbe, bei den einfachen Functionen $\vartheta[\varrho](v)$, sondern bei den Theta-

producten die geeignete Grundlage für die beabsichtigte Darstellung zu suchen ist. Dem entsprechend soll im Folgenden diese Darstellung unter Zugrundelegung von drei Thetaproducten als Fundamentalfunctionen durchgeführt werden.

Zu dem Ende gehe man auf die Gleichung (III) zurück, dividire linke und rechte Seite durch $\vartheta^3\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$ und ersetze die Constante mit Hülfe der Gleichungen (R_0) durch den ihr entsprechenden Ausdruck in z; man erhält dann:

$$1+\left(\frac{\vartheta\{\beta,\beta+\alpha\ \beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}\right)^3+\left(\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}\right)^3$$
$$-\frac{1+2z^3}{z^2}\left(\frac{\vartheta\{\beta,\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}\right)\left(\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}\right)=0.$$

Setzt man nun:

$$\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}+\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=2Z,$$
$$\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}-\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=2Z',$$

oder, was dasselbe:

$$\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=Z+Z',\quad \frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=Z-Z'$$

und führt diese Grössen Z, Z' in die obige Gleichung ein, so geht dieselbe über in:

$$1+2Z^3+6ZZ'^2-\frac{1+2z^3}{z^2}(Z^2-Z'^2)=0,$$

und es ergibt sich daraus für Z' der Ausdruck:

$$Z'=\sqrt{\frac{Z^2(1+2z^3)-z^2(1+2Z^3)}{1+2z^3+6z^2Z}}.$$

Man hat daher schliesslich, wenn man zur Abkürzung:

$$\frac{Z^2(1+2z^3)-z^2(1+2Z^3)}{1+2z^3+6z^2Z}=R$$

setzt:

(1) $$\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=Z+\sqrt{R},$$

(2) $$\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}=Z-\sqrt{R}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (I), (II) lassen sich nun ohne Mühe die achtzehn noch übrigen Quotienten ebenfalls als Functionen von Z

darstellen. Dividirt man nämlich linke und rechte Seiten der Gleichungen (I), (II) durch $\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$, führt dann an Stelle von $[\eta]$ beziehlich $[\zeta]$ die angegebenen speciellen Charakteristiken ein und ersetzt die beiden rechts auftretenden Quotienten von Thetaproducten jedesmal durch die soeben für sie gefundenen Functionen von Z, die vorkommenden Constanten aber durch die sich aus den Gleichungen (R_0) dafür ergebenden Ausdrücke in z, so erhält man zunächst aus den Gleichungen (I) für die neun übrigen denselben Nenner $\vartheta\{0 \mid \alpha \mid -\alpha\}(v)$ besitzenden Quotienten von Thetaproducten, wenn man noch zur Abkürzung:

$$\frac{(0\ \alpha\ -\alpha)+2(\beta\ \beta+\alpha\ \beta-\alpha)}{(0\mid\beta\mid-\beta)} = \sqrt[3]{\frac{\tau^{\alpha\mid\alpha}(1+2z)(1-z)^2}{\tau^{\beta\ \beta}z^2}} = \Delta_1,$$

$$\frac{(0\ \alpha\ -\alpha)+2\tau^{\alpha\ \beta}(\beta\ \beta+\alpha\ \beta-\alpha)}{(0\mid\beta+\alpha\mid-\beta-\alpha)} = \sqrt[3]{\frac{\tau^{\alpha\ \alpha}(1+2\tau^{\alpha\ \beta}z)(1-\tau^{\alpha\ \beta}z)^2}{\tau^{\beta+\alpha\mid\alpha}\tau^{\beta\mid\alpha}z^2}} = \Delta_2,$$

$$\frac{(0\ \alpha\ -\alpha)+2\tau^{\beta\ \alpha}(\beta\ \beta+\alpha\ \beta-\alpha)}{(0\ \beta-\alpha\mid-\beta+\alpha)} = \sqrt[3]{\frac{\tau^{\alpha\ \alpha}(1+2\tau^{\beta\ \alpha}z)(1-\tau^{\beta\ \alpha}z)^2}{\tau^{\beta-\alpha\mid\alpha}\tau^{\alpha\ \beta}z^2}} = \Delta_3$$

setzt, nach leichten Umformungen die folgenden Gleichungen:

(3) $$\frac{\vartheta\{0\mid\beta\mid-\beta\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_1}\{1+2Z\},$$

(4) $$\frac{\vartheta\{\alpha\ \alpha+\beta\ \alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0\ \alpha\ -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_1}\{1-Z+(\tau^{\beta\ \alpha}-\tau^{\alpha\mid\beta})\sqrt{R}\},$$

(5) $$\frac{\vartheta\{-\alpha\ -\alpha+\beta\ -\alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\ -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_1}\{1-Z-(\tau^{\beta\mid\alpha}-\tau^{\alpha\ \beta})\sqrt{R}\},$$

(6) $$\frac{\vartheta\{0\ \beta+\alpha\ -\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\ -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_2}\{1+2\tau^{\alpha\ \beta}Z\},$$

(7) $$\frac{\vartheta\{\beta-\alpha\mid 2\beta\ -2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\ \alpha\ -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_2}\tau^{\beta\ \alpha}\{1-\tau^{\alpha\ \beta}Z+(1-\tau^{\beta\ \alpha})\sqrt{R}\},$$

(8) $$\frac{\vartheta\{-\beta+\alpha\mid 2\alpha\ -2\beta\}(v)}{\vartheta\{0\ \alpha\ -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_2}\tau^{\beta\ \alpha}\{1-\tau^{\alpha\mid\beta}Z-(1-\tau^{\beta\ \alpha})\sqrt{R}\},$$

(9) $$\frac{\vartheta\{0\ \beta-\alpha\ -\beta+\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\ \alpha\ -\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_3}\{1+2\tau^{\beta\mid\alpha}Z\},$$

(10) $$\frac{\vartheta\{\beta+\alpha\ 2\beta\ 2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_3}\tau^{\alpha\ \beta}\{1-\tau^{\beta\ \alpha}Z+(1-\tau^{\alpha\ \beta})\sqrt{R}\},$$

(11) $$\frac{\vartheta\{-\beta-\alpha\ -2\alpha\ -2\beta\}(v)}{\vartheta\{0\mid\alpha\mid-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta_3}\tau^{\alpha\ \beta}\{1-\tau^{\beta\ \alpha}Z-(1-\tau^{\alpha\ \beta})\sqrt{R}\}.$$

In derselben Weise ergeben sich aus den Gleichungen (II), wenn man zur Abkürzung:

$$\frac{9(0\,|\,\alpha\,|-\alpha)}{(0)^3+8(\alpha)^3} = \sqrt[3]{\tau^{|\alpha|}(1+8z^3)(1-z^3)^2} = \Delta$$

setzt, für die neun den neun Thetacuben entsprechenden Quotienten die folgenden Ausdrücke:

$$(12)\quad \frac{\vartheta^3\{0\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{1+2z^3+6z^2Z\},$$

$$(13)\quad \frac{\vartheta^3\{\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{1+2z^3-3z^2Z+(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})3z^2\sqrt{R}\},$$

$$(14)\quad \frac{\vartheta^3\{-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{1+2z^3-3z^2Z-(\tau^{\beta|\alpha}-\tau^{\alpha|\beta})3z^2\sqrt{R}\},$$

$$(15)\quad \frac{\vartheta^3\{\beta\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{3z^2+(1+3z^2+2z^3)Z+(1-3z^2+2z^3)\sqrt{R}\},$$

$$(16)\quad \frac{\vartheta^3\{\beta+\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\beta|\alpha}z^2+(1+3\tau^{\beta,\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha|\beta}Z + (1-3\tau^{\beta|\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha|\beta}\sqrt{R}\},$$

$$(17)\quad \frac{\vartheta^3\{\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\alpha,\beta}z^2+(1+3\tau^{\alpha,\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta|\alpha}Z + (1-3\tau^{\alpha|\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta|\alpha}\sqrt{R}\},$$

$$(18)\quad \frac{\vartheta^3\{-\beta\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{3z^2+(1+3z^2+2z^3)Z-(1-3z^2+2z^3)\sqrt{R}\},$$

$$(19)\quad \frac{\vartheta^3\{-\beta+\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\alpha|\beta}z^2+(1+3\tau^{\alpha,\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta|\alpha}Z - (1-3\tau^{\alpha|\beta}z^2+2z^3)\tau^{\beta,\alpha}\sqrt{R}\},$$

$$(20)\quad \frac{\vartheta^3\{-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0\,|\,\alpha\,|-\alpha\}(v)} = \frac{1}{\Delta}\{3\tau^{\beta|\alpha}z^2+(1+3\tau^{\beta|\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha,\beta}Z - (1-3\tau^{\beta|\alpha}z^2+2z^3)\tau^{\alpha|\beta}\sqrt{R}\}.$$

Die hier gewonnenen zwanzig Gleichungen, welche die links stehenden Quotienten als Functionen der nämlichen unabhängigen Veränderlichen Z darstellen, können, zusammen mit den früher für die Constanten $\vartheta[\varepsilon](0)$ erhaltenen Ausdrücken (R_0), als vollständiger Ersatz nicht nur der sämmtlichen aus den Formeln (A), (B), (C), (D) hervorgehenden Gleichungen, sondern aller überhaupt existirenden

Relationen zwischen den einundzwanzig auf dasselbe Argument v bezogenen Functionen $\vartheta^3\{\varrho\}(v)$, $\vartheta\{\varrho \mid \varrho+\sigma \mid \varrho-\sigma\}(v)$ angesehen werden.

Die bei dieser Darstellung benutzte Grösse:

$$Z=\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}+\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}$$

ist als Function von v betrachtet eine gerade Function und nimmt für $v=0$ den Werth z an; die von Z abhängige Grösse:

$$\sqrt{R}=\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}$$

dagegen ist eine ungerade Function von v, die als solche für $v=0$ verschwindet. Die zwanzig aufgestellten Gleichungen bleiben daher richtig, wenn man darin gleichzeitig $v=0$, $Z=z$, $\sqrt{R}=0$ setzt; die so entstehenden Gleichungen können als vollständiger Ersatz der Gleichungen (R_0) angesehen werden, insofern als sie ebenso wie diese alle Relationen zwischen den Grössen $(\varrho)^3$ und $(\varrho|\varrho+\sigma|\varrho-\sigma)$ liefern.

Das System der zwanzig Gleichungen (1), (2), . . ., (20) ist ebenso wie das der früheren Gleichungen (I), (II), (III), aus dem es abgeleitet wurde, durch die Wahl der Charakteristik $[\alpha]$ völlig bestimmt, und es entstehen weiter, ebenso wie dort, wenn man an Stelle der Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$ auf alle möglichen Weisen specielle Charakteristiken einführt, im Ganzen nur vier verschiedene Systeme von Gleichungen. Betrachtet man $[\alpha]$, $[\beta]$ als feste Charakteristiken, so erhält man aus dem hier aufgestellten Systeme die drei noch übrigen, wenn man $[\alpha]$, $[\beta]$ einmal durch $[\beta]$, $[\alpha]$, dann durch $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$, endlich durch $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ ersetzt. Die diesen vier Systemen entsprechenden Grössen Z sollen durch Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 bezeichnet werden, sodass also:

$$Z_1=\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta|\beta+\alpha|\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)}+\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta|-\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\alpha|-\alpha\}(v)},$$

$$Z_2=\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\alpha|\alpha+\beta|\alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta|-\beta\}(v)}+\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\alpha|-\alpha+\beta|-\alpha-\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta|-\beta\}(v)},$$

$$Z_3=\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta-\alpha|2\beta|-2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)}+\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta+\alpha|2\alpha|-2\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta+\alpha|-\beta-\alpha\}(v)},$$

$$Z_4=\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{\beta+\alpha|2\beta|2\alpha\}(v)}{\vartheta\{0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha\}(v)}+\frac{1}{2}\frac{\vartheta\{-\beta-\alpha|-2\alpha|-2\beta\}(v)}{\vartheta\{0|\beta-\alpha|-\beta+\alpha\}(v)}$$

ist. Die früher eingeführten Constanten z_1, z_2, z_3, z_4 stehen dann in directem Zusammenhange mit diesen Grössen, insofern als für $v=0$

$Z_1 = z_1$, $Z_2 = z_2$, $Z_3 = z_3$, $Z_4 = z_4$ wird. Es bestehen weiter aber auch zwischen den vier Functionen Z dieselben Beziehungen wie zwischen den vier Constanten z. Drückt man nämlich mit Hülfe der oben aufgestellten Gleichungen (3), (4), ..., (11), welche die Grösse $Z = Z_1$ enthalten, die mit Z_2, Z_3, Z_4 bezeichneten Functionen durch die Grösse $Z = Z_1$ aus, so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen:

$$Z_2 = \frac{1 - Z_1}{1 + 2 Z_1}, \quad Z_3 = \tau^{\beta|\alpha} \frac{1 - \tau^{\alpha|\beta} Z_1}{1 + 2\tau^{\alpha|\beta} Z_1}, \quad Z_4 = \tau^{\alpha|\beta} \frac{1 - \tau^{\beta|\alpha} Z_1}{1 + 2\tau^{\beta|\alpha} Z_1},$$

welche dieselbe Form besitzen wie die früher für die Constanten z gefundenen und für $v = 0$ in dieselben übergehen.

Würzburg, im Februar 1883.